Skript LAAG II

Stefan E. Schmidt

LaTeX: Maximilian Marx
Jens Zumbrägel

TU Dresden

Sommersemester 2014

Version vom 29.08.2014

Inhaltsverzeichnis

„Wenn Leute nicht glauben, dass Mathematik einfach ist, dann nur deshalb, weil sie nicht begreifen, wie kompliziert das Leben ist.“

(– John von Neumann)

1 Projektionen, Basen, Austauschprinzip

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ linksseiter Semiring-Modul, „Modul über $\mathbb{S}$“.

Laxe Schreibweise ${}_{\mathbb{S}}\mathbb{M} := \mathcal{M}$.

1.1 Beispiel

$\mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P) = (\mathbb{S}^{(P)}_{\mathrm{add}}, \mathbb{S}, \sigma)$, P Menge, wobei $\sigma(s, \lambda) := s \cdot \lambda : P \to S$, $p \mapsto s \cdot \lambda p$.

(Anwender: $3 \cdot (7, 3, 5) = (3 \cdot 7, 3 \cdot 3, 3 \cdot 5)$, $P = \{p, q, r\}$, $s = 3$, $\lambda p = 7$, $\lambda q = 3$, $\lambda r = 5$.)

Laxe Schreibweise ${}_{\mathbb{S}}\mathbb{S}^{(P)} := \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P)$, für P endlich ${}_{\mathbb{S}}\mathbb{S}^{P}$. Für $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ also ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{P}$ reeller Vektorraum.

Ganz lax $\mathbb{S}^{(P)} := {}_{\mathbb{S}}\mathbb{S}^{(P)}$, für $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ also $\mathbb{R}^{(P)}$. Für $P = [n]$ sei $\mathbb{S}^{n} := \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, [n])$, also $\mathbb{R}^{n}$ n-dimensionaler reeller Vektorraum ($n = 2$ Ebene, $n = 3$ Raum). □

Es ist $\delta^P : P \to S^{(P)}$, $p \mapsto \delta^P_p$ Standardbasis „Diracbasis“ von $\mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P) = \mathbb{S}^{(P)}$, wobei

$$\delta^P_p : P \to S, \quad q \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } q = p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Universelle Eigenschaft (lineare Abbildungen): Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul und sei $\gamma \in M^P$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ S^{(P)} & & M \end{tikzcd}$$

Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f_\gamma : \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P) \to \mathcal{M}$, gegeben durch $\lambda \mapsto \lambda * \gamma := \sum_{p \in P} \lambda p \cdot \gamma p$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ S^{(P)} \arrow[rr, "f_\gamma"'] & {} & M \end{tikzcd}$$

kommutiert, das heißt $f_\gamma \circ \delta^P = \gamma$. Sinnbild:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P) \arrow[rr, "\exists!\, f_\gamma"'] & {} & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

1.1 Projektionen und Retraktionen

Jede Abbildung $f : A \to B$ hat eine Zerlegung $f = \iota \circ g \circ \pi_{A/\ker f}$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{A/\ker f}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & B & y \\ {[x]\ker f} & A/\ker f \arrow[r, "\sim", "g"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook, "\iota"'] & y \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$$[x]\ker f \longmapsto fx$$

Entsprechendes gilt für Morphismen $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ (zum Beispiel) von Monoiden $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$.

Wichtige Einsicht zu Projektionen Was ist eine Projektion?

„intern“: lineare Projektion, das heißt lineare Abbildung $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}$ (Endomorphismus) mit $\varphi^2 = \varphi$ (idempotent)

„extern“: Retraktion (Zurückziehung), Split-Epi (entscheidender Teil einer Projektion, „externe Projektion“)

$$(\text{Raum}) \quad A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \quad (\text{Ebene})$$

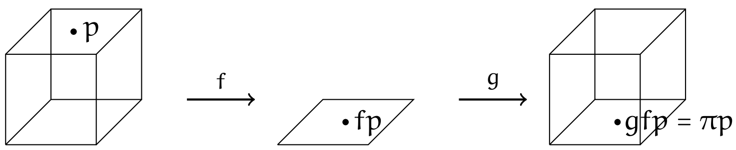
Zum Beispiel $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$, dann projiziert f Raum auf Ebene, g bettet Ebene in den Raum ein.

1. f *Retraktion* zu g, das heißt $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

2. g *Sektion* zu f, das heißt $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

3. $\pi := g \circ f$ idempotente Abbildung („verallgemeinerte Projektion“), denn

$$\pi \circ \pi \;=\; (g \circ f) \circ (g \circ f) \;=\; g \circ (f \circ g) \circ f \;=\; g \circ f \;=\; \pi.$$



1.2 Beispiel

Sei φ Morphismus von einem Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ in ein Monoid $\mathbb{M}' = (M', +', 0')$, das heißt $\mathbb{M} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{M}'$, $\varphi(x + y) = \varphi x +' \varphi y$, $\varphi 0 = 0'$.

Sei $U \subseteq M$ *Transversale* von φ, das heißt zu jedem $x \in M$ existiert genau ein $u_x \in U$ mit $\varphi x = \varphi(u_x)$, also ist U Vertretersystem von $M/\ker \varphi$, und U bildet ein Untermonoid von $\mathbb{M}$ (das heißt $u, w \in U \Rightarrow u + w \in U$ und $0 \in U$).

Sei $\epsilon : M \to U$, $x \mapsto u_x$ und $\iota : U \to M$, $u \mapsto u$. Offensichtlich (nach Definition) gilt $\epsilon \circ \iota = \mathrm{id}_U$, das heißt ϵ ist Retraktion zu ι. Zugehörige Projektion ist $\pi := \iota \circ \epsilon : M \to M$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi:=\iota\circ\epsilon"'] \arrow[dr, shift right, "\epsilon"'] & \mathbb{M}' \\
\mathbb{M} \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathbb{U} \arrow[u, hook, "\psi:=\varphi\circ\iota"'] \arrow[ul, hook, shift right, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Behauptung: ϵ Morphismus, das heißt $u_{x+y} = u_x + u_y$ für alle $x, y \in M$, und $u_0 = 0$.

Begründung: Es gilt $\varphi(u_{x+y}) = \varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y = \varphi(u_x) + \varphi(u_y) = \varphi(u_x + u_y)$ (weil U Transversale von φ, und φ Morphismus). Also $\varphi(u_{x+y}) = \varphi(u_x + u_y)$, somit $u_{x+y} = u_x + u_y$ (weil U Transversale von φ). Außerdem gilt $u_x = x$ für alle $x \in U$, da U Transversale von φ ist. Insbesondere ist $u_0 = 0$, da $0 \in U$ ist.

Also ist $\epsilon : M \to U$, $x \mapsto u_x$ Morphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{U} := \mathbb{M}|U$ mit $\epsilon \circ \iota = \mathrm{id}_U$, das heißt ϵ ist Retraktion zu ι. Also $\pi := \iota \circ \epsilon$ ist idempotent (verallgemeinerte Projektion), es gilt sogar $\epsilon \circ \pi = \epsilon$, da $\epsilon \circ (\iota \circ \epsilon) = (\epsilon \circ \iota) \circ \epsilon = \mathrm{id}_U \circ \epsilon = \epsilon$.

Behauptung: $\psi := \varphi \circ \iota = \iota|U$ ist Einbettung, das heißt injektiv. Für $x \in U$ ist $\psi x = \varphi(\iota x) = \varphi x$. Sei $x, y \in U$ mit $\psi x = \psi y$, also $\varphi x = \varphi y$, dann ist $x = y$, da U Transversale ist.

Also ist $\varphi = \psi \circ \epsilon$ mit ψ Einbettung und ϵ Retraktion. □

Warnung: Oft hat φ keine Transversale U. Beispiel: $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & x \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{gerade.} \end{cases}$

Versuche $U := 2\mathbb{Z} = \operatorname{Ker} \varphi$? Es gibt kein 2-elementiges Untermonoid von $\mathbb{Z}_{\mathrm{add}}$.

Transversalen von linearen Abbildungen Seien $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ und $\mathcal{M}' = (\mathbb{M}', \mathbb{S}, \sigma')$ Semiring-Moduln. $U \subseteq M$ bilde *Untermodul* („Unterraum“) von $\mathcal{M}$, das heißt $\bar{0} \in U$ und aus $u, v \in U$ folgt stets $u + v \in U$, und für $s \in S$ und $u \in U$ ist stets $su = \sigma(s, u) \in U$ (laxe Notation $U \leq \mathcal{M}$).

Sei außerdem φ lineare Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}'$, das heißt $\varphi\bar{0} = \bar{0}'$, $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi v_1 + \varphi v_2$ und $\varphi(sv) = s\varphi v$ für alle $v, v_1, v_2 \in M$, $s \in S$ (folglich ist $\varphi(\lambda * \gamma) = \lambda * (\varphi \circ \gamma)$, das heißt $\varphi(\sum_{p \in P} \lambda p \cdot \gamma p) = \sum_{p \in P} \lambda p \cdot \varphi(\gamma p)$, für alle $\lambda \in S^P$ und $\gamma \in M^P$ für beliebige endliche Mengen P).

Eine *Transversale* von $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ ist ein Untermodul $U \leq \mathcal{M}$ derart, dass:

$$\forall x \in M \ \exists!\, u_x \in U : \ \varphi x = \varphi(u_x).$$

1.3 Beispiel

Sei φ Projektion von $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, [3])$, zum Beispiel

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, 0),$$

$U = \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{[3]} \mid \operatorname{supp} \lambda \subseteq [2]\right\}$. Zu $x = (x_1, x_2, x_3)$ ist $u_x = (x_1, x_2, 0) = \varphi x$, $\varphi x = \varphi(\varphi x) = \varphi(u_x)$ ($\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^{[3]}$, $(x_1, x_2, x_3) = x_1\delta_1^P + x_2\delta_2^P + x_3\delta_3^P$ für $P = [3] = \{1, 2, 3\}$). Beachte $\mathbb{R}^2 \neq U = R^2 \times \{0\}$. □

Allgemein gilt: Ist $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}$ (also $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$) Projektion, das heißt φ linear und idempotent, so ist $U := \operatorname{Im}\varphi = \varphi M$ Transversale von φ.

Begründung: Sei $x \in M$, setze $u_x := \varphi x$. Dann ist $\varphi x = \varphi(\varphi x) = \varphi(u_x)$. Sei $u \in U$ mit $\varphi x = \varphi u$. Dann existiert $y \in M$ mit $u = \varphi y$ (da $u \in U = \operatorname{Im}\varphi$), also $u_x = \varphi x = \varphi u = \varphi(\varphi y) = \varphi y = u$. Also ist u_x eindeutig.

Weiter ist $\epsilon : M \to U$, $x \mapsto u_x$ lineare Abbildung (Übung!). Es ist sogar ϵ Retraktion von $\iota : U \to M$, $x \mapsto x$, da $\epsilon \circ \iota = \mathrm{id}_U$.

Dann ist $\pi := \iota \circ \epsilon : M \to M$, $x \mapsto (\iota \circ \epsilon)x = \iota(\epsilon x) = \iota(u_x) = u_x$ (triviale Fortsetzung von ϵ im Wertebereich) Projektion, und $\psi := \varphi \circ \iota = \varphi|U$ (Einschränkung von φ auf U) ist injektiv, das heißt $\mathcal{U} \xrightarrow{\psi} \mathcal{M}$ ist Einbettung von $\mathcal{U}$ (der von U in $\mathcal{M}$ induzierte Semiring-Modul) in $\mathcal{M}$.

1.4 Theorem
Seien $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ und $\mathcal{M}' = (\mathbb{M}', \mathbb{S}, \sigma')$ Semiring-Moduln und $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}'$ lineare Abbildung mit Transversale U; bezeichne $\mathcal{U}$ den induzierten Untermodul zu U in $\mathcal{M}$, also $\mathcal{U} := \mathcal{M}|U$. Dann gibt es eine Retraktion ϵ von $\iota : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$, $x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung von U in M) mit

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, shift right, "\epsilon"'] & \mathcal{M}' \\
\mathcal{M} \arrow[u, "\iota\circ\epsilon=:\pi"] \arrow[r, "\epsilon"'] & U \arrow[u, "\psi:=\varphi\circ\iota"'] \arrow[ul, shift right, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\varphi = \psi \circ \epsilon$ Verkettung einer Retraktion mit einer Einbettung. □

Warnung: $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}_{\text{add}}, \mathbb{Z}, \sigma)$ und $\mathcal{M}' = ((\mathbb{Z}_{\text{add}})_{12}, \mathbb{Z}, \sigma')$ und

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}, \quad x \mapsto x_{12} := x \bmod 12$$

(Rest von x geteilt durch 12). Dann gibt es keine Transversale von φ!

Denn ist $U \leq \mathbb{Z}_{\text{add}}$, dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $U = n \cdot \mathbb{Z}$, somit ist U unendlich ($n \neq 0$) oder einelementig ($n = 0$), das heißt $U = \{0\}$, $\varphi\mathbb{Z}$ ist aber 12-elementig. Es müsste $\varphi|U$ injektiv sein, Widerspruch.

Ausblick: Ist $\mathbb{S}$ Divisionsring (zum Beispiel Körper), so hat jede lineare Abbildung $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}'$ eine Transversale (also $\varphi = \psi \circ \epsilon$ mit ψ Einbettung, ϵ Retraktion). (Und: Steinitzsche Austauscheigenschaft.)

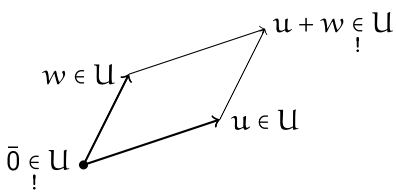
1.2 Steinitzsches Austauschprinzip

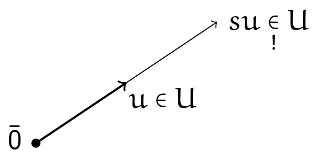
Sei $\mathbb{S}$ Divisionsring, $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma) =: {}_{\mathbb{S}}\mathbb{M}$ Semiring-Modul. $\mathcal{M}$ heißt auch (linksseitiger) *Vektorraum* über $\mathbb{S}$. Ein kommutativer Divisionsring heißt Körper. Meist werden Vektorräume über Körpern betrachtet.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (p prim) sind Beispiele für Körper. $\mathbb{H}$ Hamiltonsche Quaternionen ist Beispiel eines Divisionsringes („Schiefkörper"), der kein Körper ist.

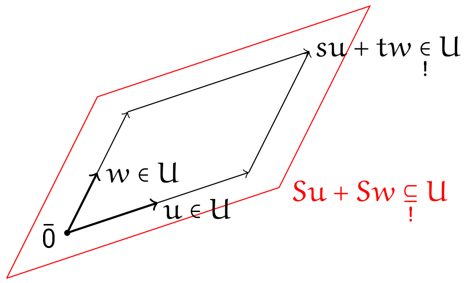
${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \simeq {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$, ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \simeq {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.

Steinitzsche Austauscheigenschaft Sei $\mathcal{M}$ Vektorraum, $\mathcal{M} = {}_{\mathbb{S}}\mathbb{M}$, $\mathbb{M} = (M, +, \bar{0})$ kommutative Gruppe von „abstrakten“ Vektoren, $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Divisionsring (zum Beispiel Körper). Bilde $U \subseteq M$ Unterraum von $\mathcal{M}$, das heißt $\bar{0} \in U$ und $\forall u, w \in U : u + w \in U$ und $\forall s \in S\ \forall u \in U :\ su = \sigma(s, u) \in U$.





Dann folgt $Su + Sw := \{su + tw \mid s, t \in S\} \subseteq U$ für alle $u, w \in U$.



1.5 Beispiel

Sei $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ und seien $u, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ mit $\mathbb{R}u \neq \mathbb{R}w$, sowie $U := \mathbb{R}u + \mathbb{R}w$. Für *jedes* $v \in \mathbb{R}^3 \setminus U$ gilt dann

$$U + \mathbb{R}v = \mathbb{R}^3,$$

also $\forall \lambda \in \mathbb{R}^3\ \exists u \in U, r \in \mathbb{R} :\ u + rv = \lambda$.

Das heißt, ist (u, w) unabhängig in $\mathbb{R}^3$ und ist $v \in \mathbb{R}^3 \setminus U$, dann ist (u, v, w) Basis. □

Steinitz verallgemeinert das Austauschprinzip des $\mathbb{R}^3$:

1.6 Theorem

Sei $\mathcal{M}$ Vektorraum über Divisionsring $\mathbb{S}$. Bilde $U \subseteq M$ Unterraum von $\mathcal{M}$, und seien $p, q \in M$ mit $q \in U + Sp$ und $q \notin U$. Dann ist $p \in U + Sq$, das heißt $U + Sp = U + Sq$. □

Beweis

Sei $q \in U + Sp$. Dann existieren $u \in U$ und $s \in S$ mit $q = u + sp$. Wäre $s = 0$, so folgte $q = u \in U$, Widerspruch (denn $q \notin U$). Also ist $s \neq 0$, und folglich $p = -s^{-1}u + s^{-1}q \in U + Sq$.

Also $q \in U + Sp$ und $q \notin U$ impliziert $p \in U + Sq$, daraus folgt $U + Sp = U + Sq$. ■

Anwendung:

1. Jedes minimale endliche „Erzeugendensystem“ (das heißt $\gamma : P \to M$ erzeugt $\mathcal{M}$, das heißt f_γ ist surjektiv; minimal: $\gamma | P_0$ erzeugt nicht, falls $P_0 \subsetneq P$; P endlich) ist bereits Basis von $\mathcal{M}$.

2. Ist $\mathcal{M}$ endlich erzeugt (das heißt, es gibt $\gamma : P \to M$ mit P endlich und γ erzeugt $\mathcal{M}$), so lässt sich jede unabhängige Familie von $\mathcal{M}$ zu einer Basis ergänzen.

Etwas formaler: Seien P, Q endliche Mengen und sei $\gamma : P \to M$ erzeugend bezüglich $\mathcal{M}$, „Erzeugendensystem“ von $\mathcal{M}$ (zum Beispiel $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P)$, $\gamma := \delta^P$). Ist $\eta : Q \to M$ unabhängig in $\mathcal{M}$ (das heißt f_η injektiv, also $\operatorname{Ker} f_\eta = \{\bar{0}\}$), so existiert $\bar{Q} \supseteq Q$ mit $\#\bar{Q} \le \#P$, und $\bar{\eta} : \bar{Q} \to M$ mit $\bar{\eta}| Q = \eta$, so dass $\bar{\eta}$ Basis von $\mathcal{M}$ ist.

1.3 Erzeugter Unterraum

Der Nullraum Kleine Quizfrage: Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul.

$$\begin{tikzcd} & \varnothing \arrow[dl, "\delta^\varnothing"'] \arrow[dr, "\gamma\,?"] & \\ \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, \varnothing) \arrow[rr, "?\,f_\gamma\,?"'] & & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Fall $P = \varnothing$, $\gamma : \varnothing \to M$, $\delta^\varnothing : \varnothing \to S^\varnothing = \{\varnothing \to S\}$. Macht das hier Sinn?

Es ist $\mathrm{Mod}(\mathbb{S}, \varnothing) = (\mathbb{S}^\varnothing_{\mathrm{add}}, \mathbb{S}, \sigma)$, $\mathbb{S}^\varnothing_{\mathrm{add}} = (\mathbb{S}^\varnothing, +, \bar{0})$, mit $S^\varnothing = \{\varnothing \to S\} = \{\bar{0}\}$ (setze $\bar{0} := (\varnothing \to S)$) der *Nullraum* zu $\mathbb{S}$.

Zu $\lambda \in S^\varnothing$ ist $f_\gamma \lambda = \lambda * \gamma = \sum_{p \in \varnothing} \lambda p \cdot \gamma p = \sum(\varnothing \to M) = 0_{\mathcal{M}}$, wobei $\mathbb{M} = (M, +, 0_{\mathcal{M}})$. Also ist $S^\varnothing = \{\bar{0}\} \xrightarrow{f_\gamma} M$, $\bar{0} \mapsto 0_{\mathcal{M}}$ die Nullabbildung. Macht also auch Sinn für $P = \varnothing$.

Es ist f_γ injektiv, also $\gamma = (\varnothing \to M)$ unabhängig in $\mathcal{M}$ – die leere Familie ist unabhängig.

Erzeugter Unterraum, Mengensicht Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul mit $\mathbb{M} = (M, +, \bar{0})$ kommutatives Monoid und $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring. Für $\gamma : P \to M$ sei

$$\operatorname{span}_{\mathcal{M}} \gamma := \langle \gamma \rangle_{\mathcal{M}} := \operatorname{Im} f_\gamma = \Big\{ \lambda * \gamma = \sum_{p \in P} \lambda p \cdot \gamma p \mid \lambda \in S^{(P)} \Big\} = S^{(P)} * \gamma = \sum_{p \in P} S \gamma p,$$

also $\operatorname{span}_{\mathcal{M}} \gamma = \sum_{p \in P} S \gamma p$ ist der von γ in $\mathcal{M}$ *erzeugte Unterraum* von $\mathcal{M}$.

Für $v \in M$ ist $Sv := \{sv \mid s \in S\}$ die von v *erzeugte Gerade* durch $\bar{0}$ in $\mathcal{M}$.

reLAXed: $\operatorname{span} \gamma := \operatorname{span}_{\mathcal{M}} \gamma$, $\langle \gamma \rangle := \langle \gamma \rangle_{\mathcal{M}}$.

1.7 Beispiel
Sei $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$, $P = [2]$ und $\gamma : P \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = (\gamma 1, \gamma 2)$, $\gamma 1 = (1, 1, 0)$, $\gamma 2 = (2, 0, 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_{\mathbb{R}^3} \gamma &= \sum_{i \in [2]} \mathbb{R} \gamma i = \mathbb{R}\gamma 1 + \mathbb{R}\gamma 2 \\ &= \{ r\gamma 1 + s\gamma 2 \mid r, s \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (r, r, 0) + (2s, 0, s) \mid r, s \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (r + 2s, r, s) \mid r, s \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

die von $\gamma = ((1, 1, 0), (2, 0, 1))$ erzeugte Ebene durch $(0, 0, 0)$ im $\mathbb{R}^3$. □

„Mengensicht“: Für $X \in 2^M$ (das heißt $X \subseteq M$) sei $\mathrm{id}(X, M) : X \to M$, $x \mapsto x$ und

$$\operatorname{span}_{\mathcal{M}} X := \langle X \rangle_{\mathcal{M}} := \operatorname{span}_{\mathcal{M}} \mathrm{id}(X, M) = \sum_{x \in X} Sx,$$

das heißt $X \subseteq M$ wird als $\mathrm{id}(X, M)$ interpretiert (übliche Schreibweisen $\subseteq_X^M := \iota_X^M := \mathrm{id}(X, M)$).

Also gilt: $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\, \gamma = \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\, \gamma P$ für jedes $\gamma \in M^P$.

Beispiel: $P = [3]$, $1 \mapsto \gamma 1$, $2 \mapsto \gamma 2$, $3 \mapsto \gamma 3$, dann $\gamma = (\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3) \mapsto \gamma P = \{\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3\}$.

In der Mengensicht („ungeordnet“, „ohne Bezug“, „Reihenfolge vergessen“) definieren wir nun unabhängige Teilmengen, erzeugende Teilmengen und Basis als Menge in Semiring-Moduln: Übergang von $\gamma \in M^P$ nach $\mathrm{Im}\, \gamma = \gamma P$.

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul. Ist $X \subseteq M$, dann lässt sich X mit sich selbst indizieren, das heißt X ersetzen durch $\mathrm{id}(X, M) = \subseteq_X^M = \iota_X^M : X \to M$, $x \mapsto x$.

1.8 Definition
Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul und $X \subseteq M$.

- X heißt *unabhängig* in $\mathcal{M}$, falls $\mathrm{id}(X, M)$ unabhängig in $\mathcal{M}$ ist, das heißt $\sum_{x \in X} \lambda x \cdot x = \sum_{x \in X} \nu x \cdot x$ impliziert $\lambda = \nu$ (das heißt $\lambda x = \nu x$ für alle $x \in X$) für beliebige $\lambda, \nu \in S^{(X)}$.
- X *erzeugt* $\mathcal{M}$, falls $\mathrm{id}(X, M)$ den Modul $\mathcal{M}$ erzeugt, das heißt zu jedem $v \in M$ existiert ein $\lambda \in S^{(X)}$ mit $v = \sum_{x \in X} \lambda x \cdot x$.
- X ist *Basis* von $\mathcal{M}$, falls X unabhängig und erzeugend bezüglich $\mathcal{M}$ ist. □

Hüllenoperatoren

1.9 Proposition
Es ist $\mathrm{span}_{\mathcal{M}} : 2^M \to 2^M$ ein *Hüllenoperator* auf $\mathbb{2}^M := (2^M, \subseteq)$ (Potenzmengenverband), das heißt

1. $\forall X \in 2^M : \ X \subseteq \mathrm{span}_{\mathcal{M}} X$ (da $v \in \sum_{x \in X} Sx$ für jedes $v \in X$), und
2. $\forall X, Y \in 2^M : \ X \subseteq \mathrm{span}_{\mathcal{M}} Y \Rightarrow \mathrm{span}_{\mathcal{M}} X \subseteq \mathrm{span}_{\mathcal{M}} Y$ (Übung). □

1.10 Definition
Allgemein heißt für eine geordnete Menge $\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$ eine Abbildung $h : P \to P$ *Hüllenoperator* auf $\mathbb{P}$, falls gilt:

1. $\forall x \in P : \ x \leq_{\mathbb{P}} hx$,
2. $\forall x, y \in P : \ x \leq_{\mathbb{P}} hy \Rightarrow hx \leq_{\mathbb{P}} hy$.

Es heißt hx die *Hülle* von x bezüglich h. □

Anmerkung: Eine Abbildung $h : P \to P$ ist Hüllenoperator auf $\mathbb{P}$ genau dann, wenn

1. h *expansiv*, das heißt $x \leq_{\mathbb{P}} hx$ für alle $x \in P$,
2. h *isoton* bzw. *monoton*, das heißt $x \leq_{\mathbb{P}} y \Rightarrow hx \leq_{\mathbb{P}} hy$ für alle $x, y \in P$, und
3. h *idempotent*, das heißt $h(hx) = hx$ für alle $x \in P$, ist.

Es ist $h : P \to P$ Hüllenoperator genau dann, wenn $\forall x, y \in P : x \leq_{\mathbb{P}} hy \Leftrightarrow hx \leq_{\mathbb{P}} hy$.

1.11 Definition (Matroid-Operatoren)
Sei M Menge und sei span Hüllenoperator auf 2^M. span heißt *algebraisch*, falls $\operatorname{span} X = \bigcup\{\operatorname{span} T \mid T \text{ endliche Teilmenge von } X\}$ für alle $X \in 2^M$.

span hat die *Steinitzsche Austauscheigenschaft*, falls gilt:

$$\forall p, q \in M \ \forall X \in 2^M: \ p \in \operatorname{span}(X \cup \{q\}) \Rightarrow p \in \operatorname{span} X \vee q \in \operatorname{span}(X \cup \{p\}).$$

Ist span algebraisch mit Austauscheigenschaft, so heißt span *Matroid-Operator*.

span heißt *endlich erzeugend*, falls eine endliche Teilmenge T von M mit $\operatorname{span} T = M$ existiert. □

Gegenbeispiel: Konvexe Hülle hat nicht Austauscheigenschaft.

1.12 Satz
Ist span *endlich erzeugender Matroid-Operator, so hat* M *bezüglich* span *eine endliche Basis. Je zwei Basen sind gleichmächtig; diese Mächtigkeit sei die* Dimension *von* M *bezüglich* span. □

Was ist hier eine Basis? Basis ist erzeugende unabhängige Teilmenge von M:

1. $X \in 2^M$ heißt *unabhängig* in (M, span), falls $\forall x \in X: x \notin \operatorname{span}(X \setminus \{x\})$ gilt.
2. $X \in 2^M$ heißt *erzeugend* bezüglich (M, span), falls $\operatorname{span} X = M$.
3. X *Basis* bezüglich (M, span) falls X unabhängig und erzeugend ist.

1.13 Satz
Ist (M, span) *endlich erzeugtes Matroid (das heißt* span *ist endlich erzeugender Matroid-Operator auf* 2^M*). Dann ist jede unabhängige Menge in einer Basis enthalten (bezüglich* (M, span)*) „Basis-Fortsetzung“.*

Jede bezüglich (M, span) *minimale, erzeugende Menge ist bereits Basis bezüglich* (M, span). □

2 Projektive und affine Geometrie

2.1 Unterraumverband

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Modul über Semiring, $\mathbb{M} = (M, +, \bar{0})$, $U \subseteq M$ Unterraum, falls $\bar{0} \in U$ und $\forall x, y \in U: \; x + y \in U$ und $\forall s \in S \;\forall x \in U: \; sx = \sigma(s, x) \in U$. Betrachte

$$\mathrm{L}\mathcal{M} := \{U \subseteq M \mid U \text{ bildet Unterraum von } \mathcal{M}\},$$

dann ist $\mathbb{L}\mathcal{M} := (\mathrm{L}\mathcal{M}, \subseteq)$ der *Unterraumverband* von $\mathcal{M}$.

Vollständige Verbände Was ist ein Verband ("lattice")?

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \vee y \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \text{kleinste obere Schranke von } \{x, y\} \\
x \arrow[dr, dash] & & y \arrow[dl, dash] & \\
 & x \wedge y & & \text{größte untere Schranke von } \{x, y\}
\end{tikzcd}$$

2.1 Definition
$\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$ heißt *verbandsgeordnete Menge* (kurz *Verband*), falls $\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$ geordnete Menge ist, für die gilt: Zu $x, y \in P$ existiert stets das *Supremum* von $\{x, y\}$ (kleinste obere Schranke von $\{x, y\}$), und das *Infimum* von $\{x, y\}$ (größte untere Schranke von $\{x, y\}$) in $\mathbb{P}$; Bezeichnung $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$. □

Formal: Es existieren zwei 2-stellige Operationen auf P, bezeichnet mit $\vee : P \times P \to P$, $(p, q) \mapsto p \vee q$ und $\wedge : P \times P$, $(p, q) \mapsto p \wedge q$ derart, dass gilt:

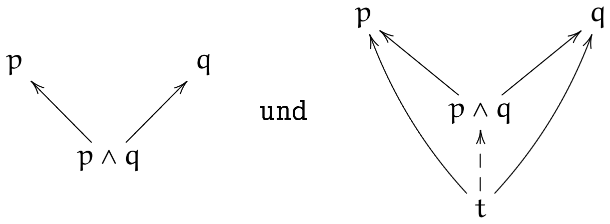
1. $\forall p, q \in P: \; p \leq_{\mathbb{P}} p \vee q, \; q \leq_{\mathbb{P}} p \vee q$ und $\forall t \in P: \; p \leq_{\mathbb{P}} t, \; q \leq_{\mathbb{P}} t \Rightarrow p \vee q \leq_{\mathbb{P}} t$,
2. $\forall p, q \in P: \; p \wedge q \leq_{\mathbb{P}} p, \; p \wedge q \leq_{\mathbb{P}} q$ und $\forall t \in P: \; t \leq_{\mathbb{P}} p, \; t \leq_{\mathbb{P}} q \Rightarrow t \leq_{\mathbb{P}} p \wedge q$.

Notation: $\sup_{\mathbb{P}}\{p, q\} := p \vee q$ Supremum von $\{p, q\}$ und $\inf_{\mathbb{P}}\{p, q\} := p \wedge q$ Infimum von $\{p, q\}$ in $\mathbb{P}$.

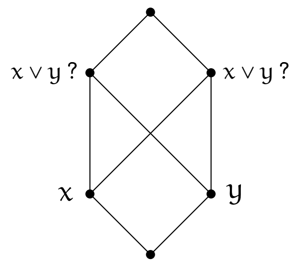
„Supremum-Bild“:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & p \vee q & \\
p \arrow[ur] & & q \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & t & \\
 & p \vee q \arrow[u, dashed] & \\
p \arrow[ur] \arrow[uur, bend left] & & q \arrow[ul] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

„Infimum-Bild“:

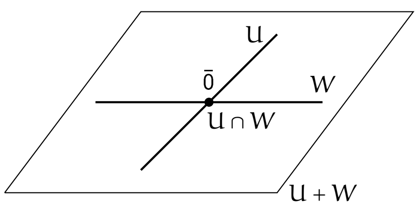


Gegenbeispiel: Geordnete Menge, die kein Verband ist:



Geometrisch, in $\mathbb{LR}^3$:

$$U \cap W = U \wedge W = \inf_{\mathbb{LR}^3} \{U, W\} = \inf \{U, W\}$$
$$U + W = U \vee W = \sup_{\mathbb{LR}^3} \{U, W\} = \sup \{U, W\}$$



Allgemein ist $\mathbb{L}\mathcal{M}$ für $\mathcal{M}$ Semiring-Modul ein Verband!
Hierbei ist $U \vee W = \sup_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \{U, W\} = U + W$ (wobei $U + W := \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$) und $U \wedge W = \inf_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \{U, W\} = U \cap W$ für $U, W \in \mathcal{L}\mathcal{M}$.

Verschärfung: $\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$ heißt *vollständiger Verband*, falls zu jeder Teilmenge X von P in $\mathbb{P}$ eine kleinste obere Schranke, genannt das *Supremum* von X in $\mathbb{P}$, und eine größte untere Schranke, genannt das *Infimum* von X in $\mathbb{P}$, existiert. Das heißt, es gibt Abbildungen $\bigvee : 2^P \to P$ „Join“ (Operator) und $\bigwedge : 2^P \to P$ „Meet“ (Operator) mit:

1. $\forall X \in 2^P : \ \forall x \in X : x \leq_{\mathbb{P}} \bigvee X$ und $\forall t \in P : (\forall x \in X : x \leq_{\mathbb{P}} t) \Rightarrow \bigvee X \leq_{\mathbb{P}} t.$

2. $\forall X \in 2^P : \ \forall x \in X : \bigwedge X \leq_{\mathbb{P}} x$ und $\forall t \in P : (\forall x \in X : t \leq_{\mathbb{P}} x) \Rightarrow t \leq_{\mathbb{P}} \bigwedge X.$

Notation: $\sup_{\mathbb{P}} X := \bigvee X$, $\inf_{\mathbb{P}} X := \bigwedge X$. Schreibweisen: $x_1 \vee x_2 := \sup_{\mathbb{L}} \{x_1, x_2\}$, $x_1 \vee \cdots \vee x_n := \sup_{\mathbb{L}} \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_1 \wedge x_2 := \inf_{\mathbb{L}} \{x_1, x_2\}$, $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n := \inf_{\mathbb{L}} \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Unterraumverband Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Modul über Semiring, $L\mathcal{M}$ Menge aller $U \subseteq M$, die Unterraum von $\mathcal{M}$ bilden. Dann ist $\mathbb{L}\mathcal{M} := (L\mathcal{M}, \subseteq)$ vollständiger Verband mit $\sup_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \mathcal{X} = \bigvee \mathcal{X} = \sum \mathcal{X}$ und $\inf_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \mathcal{X} = \bigwedge \mathcal{X} = \bigcap \mathcal{X}$ für alle $\mathcal{X} \in 2^{L\mathcal{M}}$ (das heißt $\mathcal{X} \subseteq L\mathcal{M}$).

Für $A \in (L\mathcal{M})^I$ sei $\sum A := \left\{\sum \alpha \mid \alpha \in M^{(I)}, \forall i \in I : \alpha i \in Ai\right\}$ und für $\mathcal{X} \in 2^{L\mathcal{M}}$ sei $\sum \mathcal{X} := \sum \mathrm{id}(\mathcal{X}, L\mathcal{M})$. Für $\mathcal{X} \subseteq L\mathcal{M}$ ist also

$$\sup_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \mathcal{X} = \sum \mathcal{X} = \sum \mathrm{id}(\mathcal{X}, L\mathcal{M}) = \sum_{X \in \mathcal{X}} X = \left\{ \sum_{X \in \mathcal{X}} v_X \mid \forall X \in \mathcal{X} : v_x \in X \right\}$$

(Notation ist okay, aber nicht schön).

Bessere Notation: Sei $\mathbb{L}$ vollständiger Verband, für $\alpha : I \to L$ sei $\sup_{\mathbb{L}} \alpha := \sup_{\mathbb{L}} \alpha I$.

Für $\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathcal{M}$ ist dann

$$\sup_{L\mathcal{M}} A = \sum_{i \in I} Ai = \left\{\sum \alpha \mid \alpha \in M^{(I)}, \forall i \in I : \alpha i \in Ai\right\} = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha i \mid \alpha \in M^{(I)}, \forall i \in I : \alpha i \in Ai\right\}$$

(„Index-Notation“ ist hier schöner).

2.2 Projektive Geometrie

„Geometrie mit Verbänden“ geht zurück insbesondere auf Karl Menger, aber auch Reinhold Baer, John von Neumann.

$\mathcal{M}$ Semiring-Modul, $\mathbb{L}\mathcal{M} = (\mathbb{L}\mathcal{M}, \subseteq)$ Unterraumverband.

Ist $\mathcal{M}$ Vektorraum, so heißt $\mathbb{L}\mathcal{M}$ die zu $\mathcal{M}$ gehörige *projektive Geometrie*.

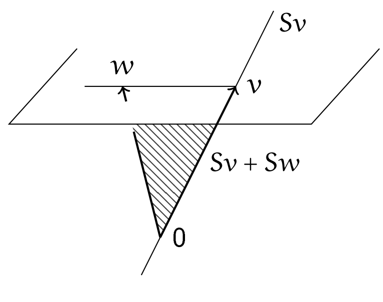
Projektive Punkte 1-dimensionale Unterräume,

Projektive Geraden 2-dimensionale Unterräume,

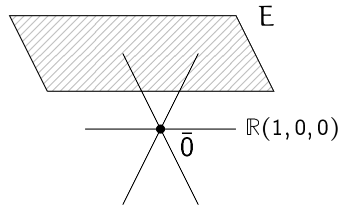
Projektive Ebenen 3-dimensionale Unterräume,

Projektive k-dim. Unterräume $(k+1)$-dimensionale Unterräume (das heißt, es gibt eine $(k+1)$-elementige Basis).

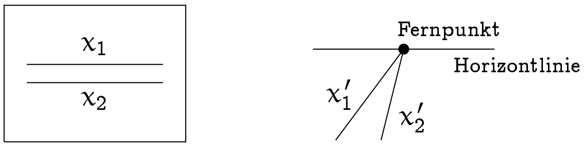
„Strahlenmodell“:



Projektive Ebene Die projektive Ebene (als Verband) über $\mathbb{R}$ ist gerade $\mathbb{L}\mathbb{R}^3$ (wobei $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Mod}(\mathbb{R},[3])$), „Albrecht Dürer“.

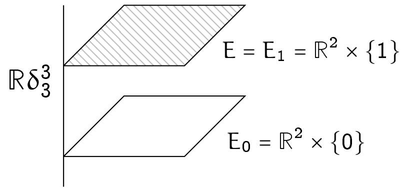


E „Anschauungsebene“, $\mathbb{R}(1,0,0) = \mathbb{R}\delta_1^3$ trifft nicht E, ist Fernpunkt ($\delta_i^n := \delta_i^{[n]}$).



affine Sicht projektive Sicht

Affine Sicht und projektive Sicht in ein Paket: $(\mathbb{L}\mathbb{R}^3, E_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\})$, wobei E_0 „Horizontlinie“, Ferngerade und $E := E_1 = \mathbb{R}^2 \times \{1\}$.

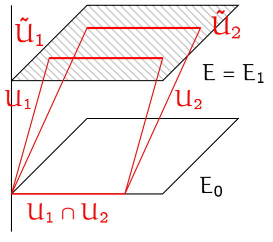


Projektive Erweiterung des $\mathbb{R}^n$ (als „affiner Raum“) ist $(\mathbb{L}\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n \times \{0\})$, wobei $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ Fernhyperebene ($n = 2$ Ferngerade, $n = 3$ Fernebene „Firmament“).

Seien U_1, U_2 projektive Geraden ($\nsubseteq E_0$) und seien $\tilde{U}_1 := U_1 \cap E$, $\tilde{U}_2 := U_2 \cap E$ „affine Geraden“. Dann gilt:

$$\tilde{U}_1 \parallel \tilde{U}_2 \text{ (parallel)} \iff U_1 \cap U_2 \subseteq E_0 \text{ oder } U_1 = U_2$$

$\mathrm{Aff}(\mathcal{M} \mid E)$ affine Geometrie induziert durch $\mathcal{M}$ betrachtet auf E.



Sei $U_0 = U_1 \cap U_2$ und $u_1 \in \tilde{U}_1$, $u_2 \in \tilde{U}_2$, dann $\tilde{U}_1 = u_1 + U_0$, $\tilde{U}_2 = u_2 + U_0$ (algebraischer Begriff von Parallelität).

Verbandstheoretische Charakterisierung Für projektive Geometrie wichtiges Gesetz: Ein vollständiger Verband $\mathbb{L} = (L, \leq)$ heißt *modular*, falls

$$\forall x, z, u \in L: \; x \leq u \; \Rightarrow \; (x \vee z) \wedge u = x \vee (z \wedge u).$$

2.2 Proposition
Ist $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Ringmodul (also $\mathbb{S}$ ist Ring), so ist $\mathbb{L}\mathcal{M}$ modular, das heißt für alle $X, Z, U \in L\mathcal{M}$ mit $X \subseteq U$ gilt $(X + Z) \cap U = X + (Z \cap U)$. □

Beweis
„$\subseteq$“: Sei $u \in (X + Z) \cap U$, also gibt es $x \in X$ und $z \in Z$ mit $u = x + z$. Dann ist $z = -x + u \in U$, denn $x \in X \subseteq U$ und $u \in U$; also $z \in Z \cap U$. Somit ist $u = x + z \in X + (Z \cap U)$.
„$\supseteq$“: Es ist $X \subseteq X + Z$ und $X \subseteq U$, sowie $Z \cap U \subseteq X + Z$ und $Z \cap U \subseteq U$. ■

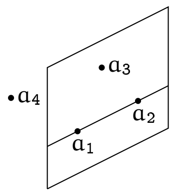
Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ ein vollständiger Verband. Wir bezeichnen mit $0_{\mathbb{L}} := \sup_{\mathbb{L}} \varnothing = \inf_{\mathbb{L}} L$ das kleinste Element in $\mathbb{L}$ und mit $1_{\mathbb{L}} := \inf_{\mathbb{L}} \varnothing = \sup_{\mathbb{L}} L$ das größte Element in $\mathbb{L}$. Es sei

$$\lessdot := \{(x, y) \in L \times L \mid x \leq y \text{ und } \nexists\, t \in L : x < t < y\}$$

die *Nachbarschaftsrelation*, dann ist $\mathcal{N}(L, \lessdot)$ Hasse-Diagramm (Hasse-Netzwerk) zu $\mathbb{L}$.

Ein vollständiger Verband $\mathbb{L}$ heißt *atomistisch*, falls jedes $x \in L$ Supremum seiner Atome ist, das heißt $x = \sup A(x)$, wobei $A(x) := \{a \in A \mid a \leq x\}$ und $A := \{a \in L \mid 0_{\mathbb{L}} \lessdot a\}$ die Menge der *Atome in* $\mathbb{L}$ sei.

2.3 Satz
Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ vollständiger Verband derart, dass eine endliche Teilmenge P von Atomen mit $\sup_{\mathbb{L}} P = 1_{\mathbb{L}}$ existiert („$1_{\mathbb{L}}$ endlich erzeugt von Atomen“), und es gebe vier unabhängige Atome: $a_2 \neq a_1$, $a_3 \nleq a_1 \vee a_2$, $a_4 \nleq a_1 \vee a_2 \vee a_3$.



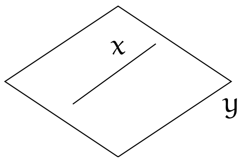
Dann sind äquivalent:

1. *$\mathbb{L}$ modular, atomistisch mit $\#A(x) \geq 3$ für jedes $x \in L \setminus (A \cup \{0_{\mathbb{L}}\})$, und*
2. *es gibt einen Divisionsring $\mathbb{S}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ derart, dass $\mathbb{L} \simeq \mathbb{L}\mathcal{M}$ für $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, [n])$ ($\simeq$ isomorph).*

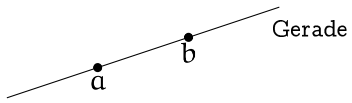
„ohne Beweis“ □

Verbandsgeometrie Projektive Geometrie wird als Verband axiomatisch definiert als vollständiger Verband, atomistisch, „Atome sind kompakt“, modular und folgende „Reichhaltigkeit“: „Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.“

Begriffsklärung: Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ vollständiger Verband, das heißt für alle $X \in 2^L$ existiert $\sup_{\mathbb{L}} X$ und $\inf_{\mathbb{L}} X$. Interpretiere $x \leq y$ als „x ist enthalten in y“ bzw. „x liegt auf/in y“.



Sei $A\mathbb{L} = A(\mathbb{L})$ Menge der Atome von $\mathbb{L}$, das sind die minimalen Element aus $L \setminus \{0_{\mathbb{L}}\}$ bezüglich $\leq$. Atome nennen wir auch *Punkte*. Die Menge $\{a \vee b \mid a, b \in A\mathbb{L} \text{ mit } a \neq b\}$ ist die Menge der *Geraden* in $\mathbb{L}$.

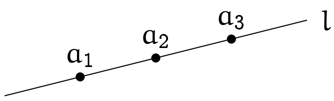


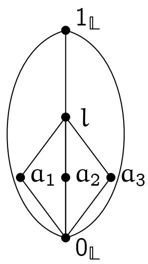
Es ist $k \in L$ *kompakt* in $\mathbb{L}$, falls für alle $X \in 2^L$ gilt:

$$k \leq \sup X \;\Rightarrow\; \exists X_0 \subseteq X \text{ endlich}: \; k \leq \sup X_0.$$

$\mathbb{L}$ *atomistisch* heißt $x = \sup_{\mathbb{L}} A\mathbb{L}(x)$ für alle $x \in L$, wobei $A\mathbb{L}(x) := \{a \in A\mathbb{L} \mid a \leq x\}$. Das heißt, jeder „Raum“ in $\mathbb{L}$ (Element von $\mathbb{L}$) ist Verbindung (Supremum) seiner Punkte; $A\mathbb{L}(x)$ Menge der Punkte auf x in $\mathbb{L}$.

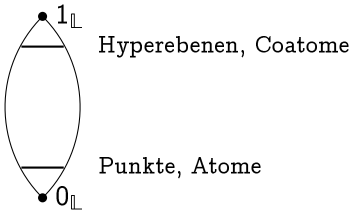
Ist l Gerade in $\mathbb{L}$, dann $\#A\mathbb{L}(l) \geq 3$, Reichhaltigkeit.





geometrisches Diagramm, „horizontal“ Ordnungsdiagramm, „vertikal“

Ein Element $h \in L$ heißt *Hyperebene*, falls h *Coatom* in $\mathbb{L}$ ist, das heißt h ist maximales Element in $L \setminus \{1_{\mathbb{L}}\}$ bezüglich $\leq$.



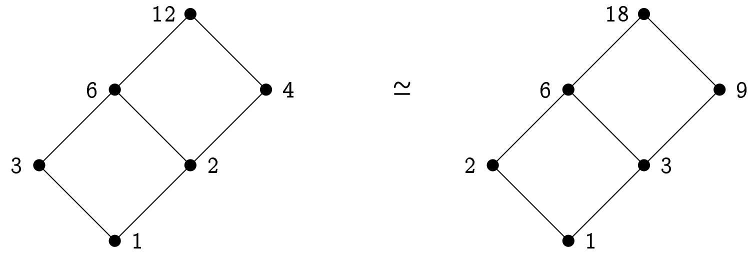
2.4 Beispiel

$\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathcal{M}$ wobei $\mathcal{M}$ Vektorraum (über Divisionsring) ist projektive Geometrie, genauer „projektive Verbandsgeometrie“. □

Sind $\mathbb{P} = (P, \leq)$ und $\mathbb{L} = (L, \leq)$ geordnete Mengen, so heißt eine Abbildung $\varphi : P \to L$ *Ordungsisomorphismus* von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{L}$, falls φ Bijektion ist mit

$$t \leq x \;\Leftrightarrow\; \varphi t \leq \varphi x \qquad \text{für alle } t, x \in P.$$

Existiert ein Ordnungsisomorphismus von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{L}$, so schreiben wir $\mathbb{P} \simeq \mathbb{L}$.



$2^i 3^j \xrightarrow{\varphi} 2^j 3^i$ Ordnungsisomorphismus

2.5 Satz (Darstellungssatz)
Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ *geordnete Menge. Dann sind äquivalent:*

1. $\mathbb{L}$ *ist projektive Geometrie, die zwei windschiefe Geraden enthält (das heißt, es gibt* l_1, l_2 *Geraden mit* $l_1 \wedge l_2 = 0_{\mathbb{L}}$*).*

2. *Es gibt* $\mathcal{M}$ *Vektorraum über Divisionsring mit* ≥ 4 *unabhängigen Vektoren, so dass* $\mathbb{L} \simeq \mathbb{L}\mathcal{M}$ *gilt.* □

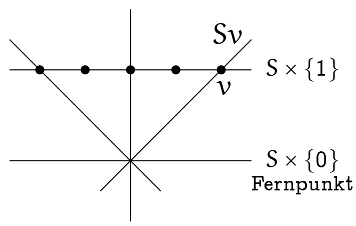
Anmerkung: Algebra zu Geometrie: einfach. Projektive Geometrie zu linearer Algebra: schwierig.

2.6 Beispiel
Ist $\mathbb{S}$ Divisionsring und $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, so heißt $\mathbb{L}(\mathbb{S}^{n+1})$ die n-dimensionale *projektive Geometrie* über $\mathbb{S}$.

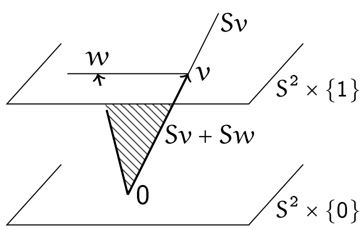
$n = -1$: $\mathbb{L}\mathbb{S}^0 = (\{\varnothing \to S\}, =) = (\{\bar{0}\}, \subseteq)$, die *leere* projektive Geometrie (*Nullgeometrie*) über $\mathbb{S}$, ist -1-dimensional.

$n = 0$: $\mathbb{L}\mathbb{S} = (\{\{0_{\mathbb{S}}\}, \mathbb{S}\}, \subseteq)$, die 1-*punktige* projektive Geometrie über $\mathbb{S}$, ist 0-dimensional.

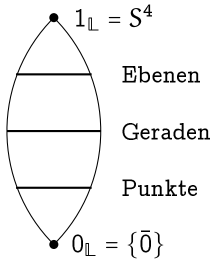
$n = 1$: $\mathbb{L}\mathbb{S}^2 = (\{\{\bar{0}\}\} \cup \{\mathbb{S}v \mid v \in S^2 \setminus \{\bar{0}\}\} \cup \{S^2\}, \subseteq)$ (Nullraum, projektive Punkte, projektive Gerade), die Geometrie der *projektiven Geraden* über $\mathbb{S}$.



$n = 2$: $\mathbb{L}\mathbb{S}^3 = (\{\{\bar{0}\}\} \cup \{Sv \mid v \in S^3 \setminus \{\bar{0}\}\} \cup \{Sv_1 + Sv_2 \mid v_1, v_2 \in S^3 \text{ unabhängig}\} \cup \{S^3\}, \subseteq)$ (Nullraum, projektive Punkte, projektive Geraden, projektive Ebene), die Geometrie der *projektiven Ebene* über $\mathbb{S}$.



$n = 3$: $\mathbb{L}\mathbb{S}^4 = (L\mathbb{S}^4, \subseteq)$, die projektive Geometrie des 3-dimensionalen *projektiven Raumes* über $\mathbb{S}$, wobei $L\mathbb{S}^4$ Menge aller Unterräume von $\mathbb{S}^4 = \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, [4])$ ist: $\{\bar{0}\}$ Nullraum, $\{\mathbb{S}v \mid v \in S^4 \setminus \{\bar{0}\}\}$ Menge der projektiven Punkte, $\{\mathbb{S}v_1 + \mathbb{S}v_2 \mid (v_1, v_2) \text{ unabhängig in } \mathbb{S}^4\}$ Menge der projektiven Geraden in $\mathbb{L}\mathbb{S}^4$, $\{Sv_1 + Sv_2 + Sv_3 \mid (v_1, v_2, v_3) \text{ unabhängig in } \mathbb{S}^4\}$ Menge der projektiven Ebenen in $\mathbb{L}\mathbb{S}^4$, S^4 3-dimensionaler projektiver Raum in $\mathbb{L}\mathbb{S}^4$.

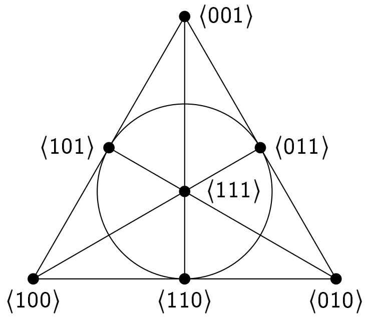


Ordnunsdiagramm zu $\mathbb{L}\mathbb{S}^4$ (hierarchisch) □

2.7 Beispiel

$\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathbb{Z}_2^3$ Geometrie der projektiven Ebene über $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2$, „kleinste projektive Ebene“.

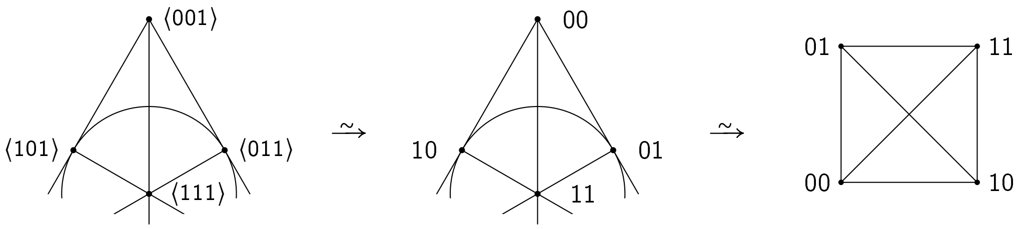
Abkürzung: $\langle x_1\, x_2\, x_3 \rangle := S(x_1, x_2, x_3)$, projektiver Punkt zu (x_1, x_2, x_3).



Horizontales „Punkt-Geraden-Modell“

$\langle 100\rangle + \langle 010\rangle = \{\langle 100 + 010\rangle = \langle 110\rangle, \langle 100\rangle, \langle 010\rangle\}$, projektive Gerade durch $\langle 100\rangle$ und $\langle 010\rangle$ enthält $\langle 110\rangle$. □

Es bilde $\{\langle 100\rangle, \langle 110\rangle, \langle 010\rangle\}$ die Ferngerade. Entferne Ferngerade und streiche dritte Komponenten, dann erhalte affinen Teil:



2.3 Affine Geometrie

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$, $\mathbb{M} = (M, +, \bar{0})$, $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ringmodul, das heißt $\mathbb{S}$ ist Ring, und sei $\mathbb{L}\mathcal{M} = (L\mathcal{M}, \subseteq)$ der Unterraumverband von $\mathcal{M}$. Die *affine Geometrie* zu $\mathcal{M}$ ist definiert als $\mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathcal{M} := (\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}, \subseteq, \parallel)$ mit

$$\mathrm{Aff}\,\mathcal{M} := \{u + W \mid u \in M \wedge W \in L\mathcal{M}\} \cup \{\varnothing\},$$

und $\parallel := \{(u + W, v + W) \mid u, v \in M \wedge W \in L\mathcal{M}\} \cup \{(\varnothing, \varnothing)\}$ (*Parallelismus* von $\mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathcal{M}$).

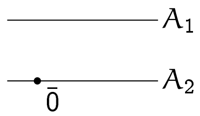
Offensichtlich ist $\parallel$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$.

Außerdem bildet $\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$ ein *Hüllensystem* in 2^M, das heißt ist $A \in (\mathrm{Aff}\,\mathcal{M})^I$ für eine beliebige Indexmenge I, so ist auch $\bigcap A \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$ (wobei $\bigcap A = \bigcap_{i \in I} A_i$, zum Beispiel für $I = [2]$ heißt das $A_1, A_2 \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$).

Also ist $(\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}, \subseteq)$ ein vollständiger Verband mit $\inf_{(\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}, \subseteq)} \mathfrak{A} = \bigcap \mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{A} \in 2^{\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}}$. Frage: Was ist $\sup_{(\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}, \subseteq)} A$? Insbesondere $A_1 \vee A_2 = ?$.

2.8 Beispiel

Sei $A_1 := (1, 0) + \mathbb{R}(0, 1) \in \mathrm{Aff}\,\mathbb{R}^2 \setminus L\mathbb{R}^2$ und $A_2 := \mathbb{R}(0, 1) \in \mathrm{Aff}\,\mathbb{R}^2 \cap L\mathbb{R}^2$, dann $A_1 \parallel A_2$, das heißt A_1 parallel zu A_2.

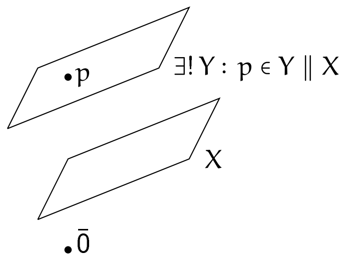


□

2.9 Proposition (Euklidisches Parallelenpostulat)

Ist $\mathcal{M}$ Ringmodul, so gilt für alle $p \in M$ und $X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$:

$$\exists!\, Y \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} : \ p \in Y \text{ und } Y \parallel X \quad (\text{kurz: } p \in Y \parallel X).$$



Es heißt Y die *Parallele* zu X durch p und wird mit $\pi(p \mid X)$ bezeichnet. □

Beweis

Zu X existiert $u \in M$ und $W \in L\mathcal{M}$ mit $X = u + W$. Setze $Y := p + W$. ■

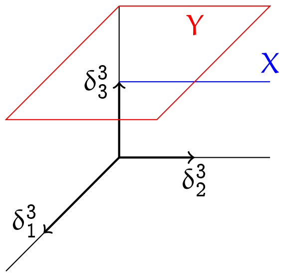
„Teilparallelität": Zu $X, Y \in \mathrm{Aff}(\mathbb{M})$ definiere

$$X \subseteq\parallel Y \ \Leftrightarrow\ \exists Z : \ X \subseteq Z \wedge Z \parallel Y,$$

X ist *teilparallel* zu Y.

2.10 Beispiel

Sei $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ und $X = \delta_3^3 + \mathbb{R}\delta_2^3$, $Y := 2\delta_3^3 + \mathbb{R}\delta_1^3 + \mathbb{R}\delta_2^3$, dann $X \subseteq\!\parallel Y$.



□

Es ist $\subseteq\!\parallel$ reflexiv und transitiv (im Allgemeinen nicht antisymmetrisch) auf $\operatorname{Aff}\mathcal{M}$, das heißt Präordnung auf $\operatorname{Aff}\mathcal{M}$. Die zugehörige Äquivalenzrelation $\subseteq\!\parallel \cap \parallel\!\supseteq$ (wo $\parallel\!\supseteq := (\subseteq\!\parallel)^d$) ist gerade der Parallelismus von $\mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathcal{M}$.

Bestimmung von $\subseteq\!\parallel$:

$$\subseteq\!\parallel \;=\; \{(p+U, q+W) \mid p, q \in M \text{ und } U, W \in L\mathcal{M} \text{ mit } U \subseteq W\} \cup \{\varnothing\} \times \operatorname{Aff}\mathcal{M}.$$

Begründung: Für $X \in \operatorname{Aff}\mathcal{M}$ und $p \in X$ ist stets $X = p + \pi(\bar{0} \mid X)$. Denn sei $p \in X = u + W$, also gibt es $w \in W$ mit $p = u + w$, somit $p + W = u + w + W = u + W = X$. Damit ist $X = p + W$, und wegen $X \parallel W$, $0 \in W$ ist $W = \pi(\bar{0} \mid X)$.

Also gilt (für $X, Y \in \operatorname{Aff}\mathcal{M}$ mit $X \neq \varnothing$ und $Y \neq \varnothing$):

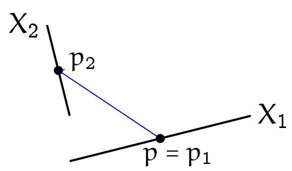
$$\begin{aligned} X \subseteq\!\parallel Y &\Leftrightarrow \pi(z \mid X) \subseteq \pi(z \mid Y) \quad \text{für ein } z \in M \\ &\Leftrightarrow \pi(\bar{0} \mid X) \subseteq \pi(\bar{0} \mid Y) \quad (\text{da } z + \pi(\bar{0} \mid X) = \pi(z \mid X)) \end{aligned}$$

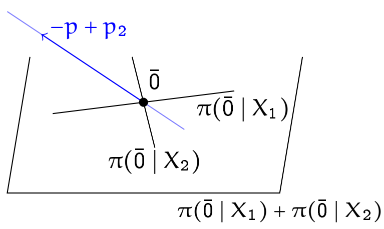
Sei $\alpha : I \to \operatorname{Aff}\mathcal{M}$, $\alpha i = X_i$. Was ist $\sup_{\mathcal{Aff}\,\mathcal{M}} \alpha$ in $\mathcal{Aff}\,\mathcal{M} := (\operatorname{Aff}\mathcal{M}, \subseteq)$? Insbesondere für $X_1, X_2 \in \operatorname{Aff}\mathcal{M}$ berechne $X_1 \vee X_2$ bzw. $\sup_{\mathcal{Aff}\,\mathcal{M}} \{X_1, X_2\}$.

Angenommen (ohne Einschränkung) $X_i \neq \varnothing$ für alle $i \in I$. Behauptung:

$$\sup_{\mathcal{Aff}\,\mathcal{M}} \alpha = \sup_{i \in I} X_i = p + \sum_{i \in I} S(-p + p_i) + \sum_{i \in I} \pi(\bar{0} \mid X_i),$$

wobei $X_i := \alpha i$ und $\forall i \in I : p_i \in X_i$, sowie $p \in \bigcup \alpha = \bigcup_{i \in I} X_i$.





$W := S(-p + p_2) + \pi(\bar{0} \mid X_1) + \pi(\bar{0} \mid X_2)$, verschiebe W um $p = p_1$, also $X_1 \vee X_2 = p + W$.

Zum Beweis: Zu zeigen $\sup_{\operatorname{Aff}\mathcal{M}} \alpha = p + W$ mit $W := U + W'$, wobei $U := \sum_{i \in I} S(-p + p_i)$ und $W' := \sum_{i \in I} W_i$ mit $W_i := \pi(\bar{0} \mid X_i)$. Hierbei seien $p_i \in X_i$ und $X_i := \alpha i$ für alle $i \in I$.

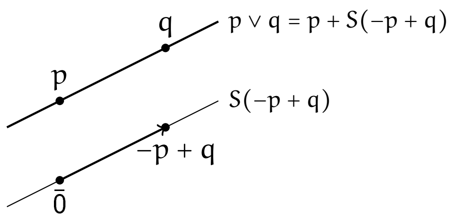
Sei $T \in L\mathcal{M}$ mit $\sup_{\operatorname{Aff}\mathcal{M}} \alpha \subseteq p + T$ (das heißt $X_i \subseteq p + T$ für alle $i \in I$). Da $p_i \in p + T$ ist, gilt $-p + p_i \in T$, also $S(-p + p_i) \subseteq T$ für alle $i \in I$. Damit ist $U = \sum_{i \in I} S(-p + p_i) \subseteq T$.

Weiter ist $X_i \subseteq p + T = p_i + T$ für alle $i \in I$, also ist $W_i = \pi(\bar{0} \mid X_i) = -p_i + X_i \subseteq T$; somit $W' = \sum_{i \in I} W_i \subseteq T$. Also ist $W = U + W' \subseteq T$, also $p + W \subseteq p + T$. Damit folgt die Behauptung.

2.11 Beispiel
Für $p, q \in M$ mit $p \neq q$ ist

$$p \vee q := p + S(-p + q) = \{s_1 p + s_2 q \mid s_1, s_2 \in S \text{ mit } s_1 + s_2 = 1\}$$

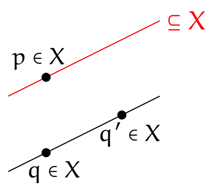
„Verbindungsgerade von p und q“.



Denn $p + s(-p + q) = (1 - s)p + sq = s_1 p + s_2 q$; ist umgekehrt $s_1 + s_2 = 1$, also mit $s := s_2$ auch $1 - s = s_1$, dann ist $s_1 p + s_2 q = (1 - s)p + sq = p + s(-p + q)$. □

2.12 Bemerkung
Für $X \subseteq M$ sind äquivalent:

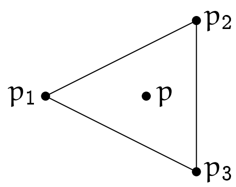
1. $X \in \operatorname{Aff}\mathcal{M}$.
2. Ist $\lambda \in S^{(I)}$ mit $\sum \lambda = 1$ und $\gamma \in X^I$, so gilt $\lambda * \gamma \in X$.
3. $\forall p, q, q' \in X\colon\ \pi(p \mid q \vee q') \subseteq X$.



□

Affine Linearkombination: Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $\gamma = (\gamma 1, \dots, \gamma n)$, $\gamma i \in X$ für alle $i \in [n]$, so ist auch $\lambda * \gamma = \lambda_1 \gamma 1 + \dots + \lambda_n \gamma n \in X$.

Beispiel: $p := \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3$ Schwerpunkt von (p_1, p_2, p_3), $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.



2.13 Proposition
Ist $\mathcal{M}$ Vektorraum über Divisionsring $\mathbb{S}$, so ist $(M, \operatorname{span}_{\mathrm{Aff}})$ Matroid, wobei

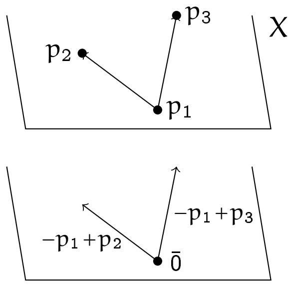
$$\begin{aligned}
\operatorname{span}_{\mathrm{Aff}} X &:= \Big\{ \sum_{x \in X} \lambda_x \cdot x \mid \lambda \in S^{(X)} \text{ mit } \sum \lambda = 1 \Big\} \\
&= \Big\{ \lambda * \gamma \mid I \text{ Menge}, \gamma \in X^I, \lambda \in S^{(I)} \text{ mit } \sum \lambda = 1 \Big\} \\
&= p + \sum_{x \in X} S(-p + x) \quad \text{für } p \in X \text{ und } X \subseteq M.
\end{aligned}$$

□

2.14 Beispiel
Sei $X = \{p_1, p_2, p_3\}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}_{\mathrm{Aff}} X &= \operatorname{span}_{\mathrm{Aff}} \{p_1, p_2, p_3\} \\
&= p_1 \vee p_2 \vee p_3 := \{p_1\} \vee \{p_2\} \vee \{p_3\} \\
&= p_1 + S(-p_1 + p_2) + S(-p_1 + p_3) \\
&= \{s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 \mid s_1, s_2, s_3 \in S \text{ mit } s_1 + s_2 + s_3 = 1\}
\end{aligned}$$

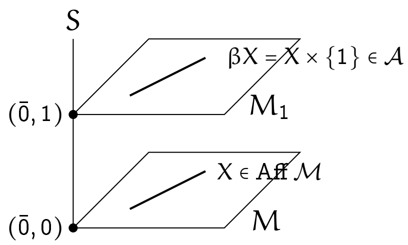
die von X aufgespannte affine Ebene (falls p_1, p_2, p_3 nicht kollinear).



□

Achtung: $\operatorname{span}_{\mathrm{Aff}} =: \operatorname{span}_{\mathrm{Aff}\,\mathcal{M}}$.

Projektive vs affine Geometrie Erweiterung von $\mathcal{M}$: Sei $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \times \mathbb{S}$.



Dann ist

$$M_1 := M \times \{1\} = (\bar{0}, 1) + M \times \{0\}$$

ein affiner Raum in $\mathcal{M}'$ (allgemein ist $(u+W) \times (u'+W') = (u, u') + W \times W'$ affiner Raum, falls $u + W$ und $u' + W'$ affine Räume).

Sei $\mathcal{A} := \{X \in \operatorname{Aff} \mathcal{M}' \mid X \subseteq M_1\}$, dann hat man eine Bijektion

$$\beta : \operatorname{Aff} \mathcal{M} \to \mathcal{A}, \quad X \mapsto X \times \{1\}.$$

Sei $\mathcal{L} := \{X \in L\mathcal{M}' \mid X \cap M_1 \neq \varnothing \text{ oder } X = \{(\bar{0}, 0)\}\}$; die Abbildung

$$\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{L}, \quad X' \mapsto \operatorname{span}_{\mathcal{M}'} X'$$

ist bijektiv und hat als Inverse

$$\sigma : \mathcal{L} \to \mathcal{A}, \quad Y \mapsto Y \cap M_1.$$

Beachte: $\operatorname{span}_{\mathcal{M}'} X \times \{1\} = S(u, 1) + W \times \{0\}$, wobei $X = u + W$, also $X \times \{1\} = (u, 1) + W \times \{0\}$.

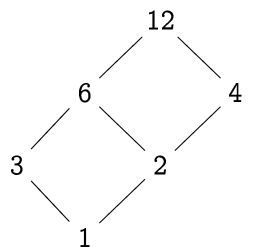
2.4 Rang- und Dimensionsformel

Das Matroschka-Prinzip „Ineinanderliegen“: Punkt auf Gerade in Ebene im Raum et cetera. Verbände sind sehr gut geeignet, das Ineinanderliegen zu beschreiben (durch Ketten), „gut für hierarchische Eigenschaften“.

Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ geordnete Menge und sei $x \lessdot y \;:\Leftrightarrow\; x < y \wedge \nexists\, t : x < t < y$ die Nachbarschaftsrelation zu $\mathbb{L}$.

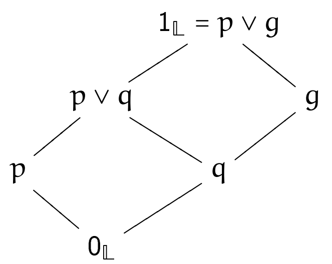
Eine *Kette* in $\mathbb{L}$ ist eine nichtleere Teilmenge $K \subseteq L$, so dass $\mathbb{L}|K = (K, \leq_{\mathbb{L}} \cap (K \times K))$ linear geordnet ist. Ist K endlich, also $\#K = n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gibt es $x_0, x_1, \ldots, x_n \in L$ mit $K = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, und wir nennen K eine Kette von *Länge* n; dann heißt K *maximal*, falls $x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_n$ gilt.

2.15 Beispiel
Sei $\mathbb{L}$ Teilerverband zu 12.



Eine Kette in $\mathbb{L}$ ist $\{1, 4, 12\}$, eine maximale Kette in $\mathbb{L}$ ist $\{1, 3, 6, 12\}$. □

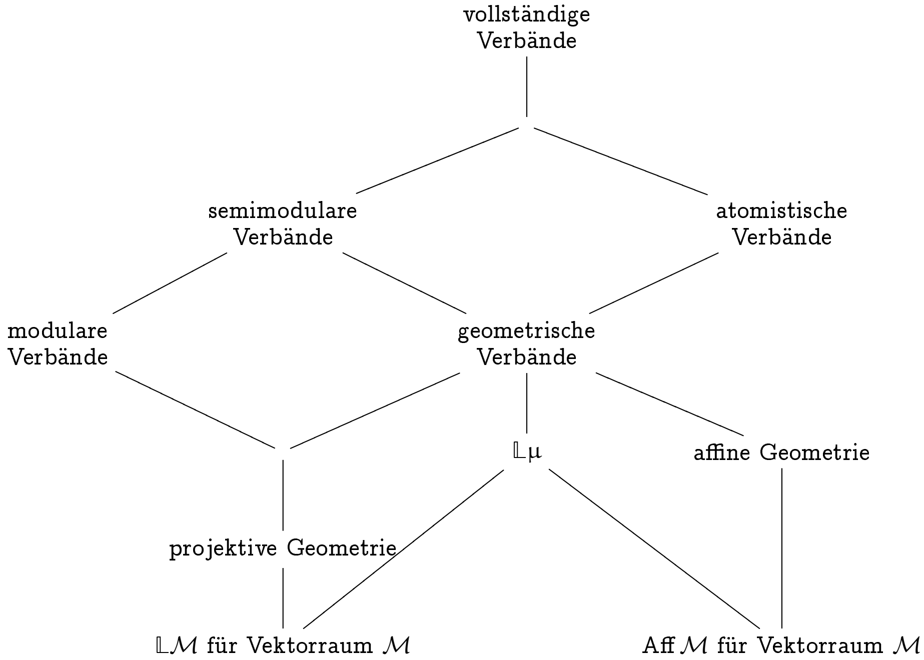
2.16 Beispiel
Geometrisches Beispiel:



Eine Kette ist $\{0_{\mathbb{L}}, g, 1_{\mathbb{L}}\}$, eine maximale Kette ist $\{0_{\mathbb{L}}, p, p \vee q, 1_{\mathbb{L}}\}$. □

Häufige Situation: Je zwei maximale Ketten haben die gleiche Länge.

Übersicht „Für uns relevante Verbände“:



- Atomistische Verbände: $\sup_{\mathbb{L}} A(x) = \sup_{\mathbb{L}} \{a \in L \mid a \text{ Atom}, a \leq x\} = x$ für jedes $x \in L$, „jeder Raum $x \in L$ ist Supremum seiner Punkte“ (Punkte sind Atome).
- Geometrische Verbände: Austauscheigenschaft, p, q Punkte, $x \in L$, dann $p \leq x \vee q$ impliziert $p \leq x$ oder $q \leq x \vee p$.
- $\mathbb{L}\mu$ Verband aller abgeschlossenen Mengen eines Matroids $\mu = (M, \operatorname{span})$: $L\mu := \left\{X \in 2^M \mid \operatorname{span} X = X\right\}$ „abgeschlossene Mengen von μ“, $\mathbb{L}\mu := (L\mu, \subseteq)$.
- $\mathbb{L}\mathcal{M}$ Verband der Unterräume des Vektorraums $\mathcal{M}$, $\mu := (M, \operatorname{span}_{\mathcal{M}})$.
- Modulares Gesetz: $x \leq u \Rightarrow (x \vee z) \wedge u = x \vee (z \wedge u)$ (modulare Geometrie, “pointless Geometry“, John von Neumann).

Semimodulare Verbände, Rangformeln Betrachte nun *semimodulares Gesetz*:

$$x \wedge y \lessdot y \quad \Rightarrow \quad x \lessdot x \vee y,$$

wobei $\lessdot$ die Nachbarschaftsrelation zu $\mathbb{L}$ sei.

2.17 Satz
Sei $\mathbb{L}$ semimodularer vollständiger Verband (SM-Verband), welcher eine endliche maximale Kette der Länge $n \in \mathbb{N}$ enthält. Dann ist in $\mathbb{L}$ jede Kette von Länge höchstens n. Insbesondere haben alle maximalen Ketten die Länge n. □

2.18 Korollar
Zu $v, w \in L$ mit $v \leq w$ sei $[v,w]_{\mathbb{L}} := \{x \in L \mid v \leq x \leq w\}$ „Intervall" zu (v,w) in $\mathbb{L}$, dann ist auch $\mathbb{L}|[v,w]_{\mathbb{L}}$ ein SM-Verband, und es sei der Rang *$\Delta_{\mathbb{L}}(v,w)$ definiert als Länge einer maximalen Kette in $\mathbb{L}|[v,w]_{\mathbb{L}}$. Zu $x \in L$ sei $r_{\mathbb{L}}x$ definiert als $\Delta_{\mathbb{L}}(0_{\mathbb{L}},x)$, also Länge eines maximalen Pfades von $0_{\mathbb{L}}$ nach x in $\mathbb{L}$.*

Dann ist $\Delta_{\mathbb{L}}$ funktoriell, *das heißt*

$$\Delta_{\mathbb{L}}(p,q) = \Delta_{\mathbb{L}}(p,t) + \Delta_{\mathbb{L}}(t,q) \qquad \text{für alle } p,t,q \in L \text{ mit } p \leq t \leq q,$$
$$\Delta_{\mathbb{L}}(p,p) = 0 \qquad \text{für alle } p \in L.$$

Es folgt $\Delta_{\mathbb{L}}(p,q) = -\Delta_{\mathbb{L}}(0_{\mathbb{L}},p) + \Delta_{\mathbb{L}}(0_{\mathbb{L}},q)$, und somit die Rangformel*:*

$$\Delta_{\mathbb{L}}(p,q) = -r_{\mathbb{L}}p + r_{\mathbb{L}}q. \qquad \square$$

Anwendung: Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ Vektorräume über Divisionsring $\mathbb{S}$, und sei $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}'$ lineare Abbildung. Dann $M/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$. Also $r_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \operatorname{Im}\varphi = r_{\mathbb{L}\mathcal{M}}(M/\operatorname{Ker}\varphi) = \Delta_{\mathbb{L}\mathcal{M}}(\operatorname{Ker}\varphi, M) = -r_{\mathbb{L}\mathcal{M}} \operatorname{Ker}\varphi + r_{\mathbb{L}\mathcal{M}}M$, und mit $r_{\mathbb{L}\mathcal{M}}\mathcal{M} = \operatorname{Dim}\mathcal{M}$ somit

$$\operatorname{Dim}\operatorname{Im}\varphi = -\operatorname{Dim}\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Dim}\mathcal{M}.$$

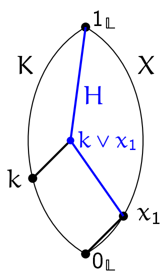
Beweis (Satz)
(MATROSCHKA-Beweis)
Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ semimodularer vollständiger Verband mit endlicher maximaler Kette $0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_{n-1} \lessdot 1_{\mathbb{L}}$ der Länge $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: Ist K Kette in $\mathbb{L}$, so ist K von Länge höchstens n. Dies sei Aussage $A(n)$.

Vollständige Induktion: $A(0)$ klar.

Für $n > 0$ sei $A(i)$ wahr für alle $i < n$, und sei $0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_{n-1} \lessdot 1_{\mathbb{L}}$ maximale Kette X in $\mathbb{L}$, und sei K Kette in $\mathbb{L}$.

1. Fall $K \setminus \{0_{\mathbb{L}}\} \subseteq [x_1, 1_{\mathbb{L}}]$. Fertig, da $A(n-1)$ für $\mathbb{L}|[x_1, 1_{\mathbb{L}}]$ gilt.

2. Fall $\exists k \in K \setminus \{0_{\mathbb{L}}\}$ mit $x_1 \nleq k$, das heißt $x_1 \wedge k = 0_{\mathbb{L}}$ (da x_1 Atom). Da $0 \lessdot x_1$ folgt $k \lessdot k \vee x_1$, da $\mathbb{L}$ semimodular.



Sei $K' := K \cap [k, 1_{\mathbb{L}}]$. Wegen $A(n-1)$ für $\mathbb{L}|[x_1, 1_{\mathbb{L}}]$ gibt es maximale Kette H in $[x_1, 1_{\mathbb{L}}]$ mit $k \vee x_1 \in H$ ("missing link") und H hat Länge $n-1$. Dann ist $H' := (H \cap [k \vee x_1, 1_{\mathbb{L}}]) \cup \{k\}$ maximale Kette in $[k, 1_{\mathbb{L}}]$, und hat Länge $i \leq n-1 < n$. Nach $A(i)$ für $\mathbb{L}|[k, 1_{\mathbb{L}}]$ folgt: K' hat Länge $\leq i$.

Außerdem ist $H'' := H \cap [x_1, k \vee x_1]$ maximale Kette in $[x_1, k \vee x_1]$ der Länge $n - i$. Betrachte die Kette $K'' := K \cap [0_{\mathbb{L}}, k]$; sind $a_1, \ldots, a_{l-1} \in L$ mit $0_{\mathbb{L}} < a_1 < \cdots < a_{l-1} < k$, dann folgt $x_1 < x_1 \vee a_1 < \cdots < x_1 \vee a_{l-1} < k \vee x_1$, da $\mathbb{L}$ semimodular; wir erhalten also eine Kette in $[x_1, k \vee x_1]$. Wegen $A(n-i)$ hat somit K'' endliche Länge $\leq n - i$.

Damit hat $K = K' \cup K''$ Länge höchstens $i + (n - i) = n$. ■

2.19 Satz

Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ *modularer vollständiger Verband und* $x, y \in L$. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \varphi : [x \wedge y, y]_{\mathbb{L}} \to [x, x \vee y]_{\mathbb{L}}, &\quad z \mapsto x \vee z, \\ \psi : [x, x \vee y]_{\mathbb{L}} \to [x \wedge y, y]_{\mathbb{L}}, &\quad u \mapsto y \wedge u, \end{aligned}$$

sind zueinander invers, also ist $\mathbb{L}|[x \wedge y, y]_{\mathbb{L}}$ *isomorph zu* $\mathbb{L}|[x, x \vee y]_{\mathbb{L}}$*; insbesondere ist* $\mathbb{L}$ *semimodular. Es folgt* $-r_{\mathbb{L}}(x \wedge y) + r_{\mathbb{L}} y = -r_{\mathbb{L}} x + r_{\mathbb{L}}(x \vee y)$ *und somit die* modulare Rangformel*:*

$$r_{\mathbb{L}}(x \vee y) + r_{\mathbb{L}}(x \wedge y) \;=\; r_{\mathbb{L}} x + r_{\mathbb{L}} y.$$ □

3 Multilinearität und Determinanten

3.1 Multilineare Abbildungen

Multilinearität: „in jeder Komponente linear", und ihre Modellierungen.

3.1 Beispiel
Betrachte $\det : (\mathbb{R}^{[2]})^{[2]} \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \det\gamma = \det(\gamma 1, \gamma 2)$.

$\gamma : [2] \to \mathbb{R}^{[2]}$, also $1 \mapsto \gamma 1 \in \mathbb{R}^{[2]}$, $2 \mapsto \gamma 2 \in \mathbb{R}^{[2]}$, wobei $\gamma 1 : [2] \to \mathbb{R}$, $i \mapsto (\gamma 1)i$, $\gamma 2 : [2] \to \mathbb{R}$, $j \mapsto (\gamma 2)j$. Also $\gamma = (\gamma 1, \gamma 2) = \big(((\gamma 1)1, (\gamma 1)2), (\gamma 2)1, (\gamma 2)2)\big)$.

$m\gamma \equiv \begin{pmatrix} \gamma 1 \\ \gamma 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (\gamma 1)1 & (\gamma 1)2 \\ (\gamma 2)1 & (\gamma 2)2 \end{pmatrix}$ Matrixmaker zu γ (Vektorenfamilie), $(m\gamma)(i,j) := (\gamma i)j$.

$\det m\gamma := \det\gamma$, also

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(\gamma 1, \gamma 2) = \det\gamma = \det((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})),$$

wobei $a_{ij} := (\gamma i)j$, $m\gamma = a$. □

Eigenschaften:

1. $\det(\gamma 1, v+w) = \det(\gamma 1, v) + \det(\gamma 1, w)$, sowie $\det(v+w, \gamma 2) + \det(v, \gamma 2) + \det(w, \gamma 2)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^{[2]}$, „det biadditiv",

2. $\det(r \cdot \gamma 1, \gamma 2) = r \cdot \det(\gamma 1, \gamma 2) = \det(\gamma 1, r \cdot \gamma 2)$ für alle $r \in \mathbb{R}$, „Skalare darf ich komponentenweise rausziehen".

Setze $\gamma 1 \bullet \gamma 2 := \det\gamma$, dann:
Biadditivität: $(\gamma 1) \bullet (v+w) = (\gamma 1) \bullet v + (\gamma 1) \bullet w$, und $(v+w) \bullet (\gamma 2) = v \bullet (\gamma 2) + w \bullet (\gamma 2)$.
Skalare rausziehen: $r \cdot (\gamma 1 \bullet \gamma 2) = (r \cdot \gamma 1) \bullet \gamma 2 = \gamma 1 \bullet (r \cdot \gamma 2)$.

Was ist $\det(r_1 v_1 + r_2 v_2, s_1 w_1 + s_2 w_2) = (r_1 v_1 + r_2 v_2) \bullet (s_1 w_1 + s_2 w_2)$ für $r_i, s_j \in \mathbb{R}$, $v_i, w_j \in \mathbb{R}^{[2]}$? Mit $x_i := r_i v_i$, $y_j := s_j v_j$ und 1. ist

$$(x_1 + x_2) \bullet (y_1 + y_2) = x_1 \bullet y_1 + x_1 \bullet y_2 + x_2 \bullet y_1 + x_2 \bullet y_2.$$

Wegen 2. folgt $(r_1 v_1 + r_2 v_2) \bullet (s_1 w_1 + s_2 w_2) = x_1 \bullet y_1 + x_1 \bullet y_2 + x_2 \bullet y_1 + x_2 \bullet y_2 = (r_1 s_1) \cdot (v_1 \bullet w_1) + (r_1 s_2) \cdot (v_1 \bullet w_2) + (r_2 s_1) \cdot (v_2 \bullet w_1) + (r_2 s_2) \cdot (v_2 \bullet w_2)$, also

$$(r_1 v_1 + r_2 v_2) \bullet (s_1 w_1 + s_2 w_2) = \sum_{(i,j) \in [2] \times [2]} (r_i s_j) \cdot (v_i \bullet w_j).$$

Hier: Zwei Faktoren und in jeder Summe zwei Summanden.

3.2 Beispiel (Ausmultiplizieren)
Sei $P = [m]$, $Q = [n]$ ($m = n = 2$ hatten wir gerade), sei

$$F : (\mathbb{R}^Q)^P \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \prod_{p \in P} \sum_{q \in Q} (\gamma p) q = \prod_{p \in P} \sum \gamma p,$$

wobei $\prod_{p\in P} \sum \gamma p = \prod_{i \in [m]} ((\gamma i)1 + \dots + (\gamma i)n) = \prod_{i\in[m]} (a_{i1} + \dots + a_{in})$ für $a_{ij} := (\gamma i)j$, mit $a := m\gamma : P \times Q \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$, die zugehörige Matrix, γi die i-te Zeile von a, also $\sum \gamma i$ die Zeilensumme der i-ten Zeile. Das heißt:

$$F((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})) := (a_{11} + \dots + a_{1n}) \cdot \dots \cdot (a_{m1} + \dots + a_{mn})$$

(„dots-Notation“, „semiformal“). F ist „multilineare Abbildung“.

Challenge: $F\gamma = \prod_{p\in P} \sum \gamma p$ ausmultiplizieren – wie sieht das dann aus? Wie kann ich das hinschreiben? □

Linearität in der ersten Komponente: Betrachte $\mathbb{R}^Q \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x, \gamma 2, \dots, \gamma m)$, also $(x_{11}, \dots, x_{1n}) \mapsto F((x_{11}, \dots, x_{1n}), (a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}))$.

Notation: Sei

$$\langle\gamma\rangle_1 : \mathbb{R}^Q \to (\mathbb{R}^Q)^P, \quad x \mapsto (x, \gamma 2, \dots, \gamma m),$$

wobei $\gamma \in (\mathbb{R}^Q)^P$, das heißt $\gamma = (\gamma 1, \dots, \gamma m)$.

3.3 Definition
Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ Semiring-Moduln über kommutativen Semiring $\mathbb{S}$, sei P endliche nichtleere Menge. Eine Abbildung $F : M^P \to M'$ heißt *multilinear* von $\mathcal{M}^P$ nach $\mathcal{M}'$, falls für $\langle\gamma\rangle_p : M \to M^P$, $v \mapsto \langle\gamma\rangle_p v$ gilt, dass $F \circ \langle\gamma\rangle_p : M \to M'$ linear ist, das heißt

$$M \to M', \quad v \mapsto F(\langle\gamma\rangle_p v)$$

ist linear, „F ist in der p-ten Komponente linear“, für jedes $p \in P$ (und jedes $\gamma \in M^P$).

Für $\gamma \in M^P$, $p \in P$ und $v \in M$ sei hierbei

$$\langle\gamma\rangle_p v : P \to M, \quad p' \mapsto \begin{cases} v & \text{falls } p' = p \\ \gamma p' & \text{sonst} \end{cases}$$

(ersetze p-te Komponente durch v). □

Semiformal im Fall $P = [n]$, $\gamma = (\gamma 1, \dots, \gamma n)$, ist

$$\begin{aligned} \langle\gamma\rangle_p v &= (\gamma 1, \dots, \underset{\text{p-te}}{v}, \dots, \gamma n) \\ &= (\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}, v, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_n). \end{aligned}$$

Warnung: Im Allgemeinen ist $\langle\gamma\rangle_p$ nicht linear. Beispiel $P = [3]$, $F : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \prod x = \prod_{p\in P} x_p$ ist multilinear. Für $\gamma = (1, 3, 7) \in \mathbb{R}^P$ ist $\langle\gamma\rangle_1 v = (v, 3, 7)$, dann

$$\langle\gamma\rangle_1 (v + w) = (v + w, 3, 7) = (v, 3, 7) + (w, 0, 0) \neq (v, 3, 7) + (w, 3, 7) = \langle\gamma\rangle_1 v + \langle\gamma\rangle_1 w,$$

aber $F \circ \langle\gamma\rangle_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v \cdot 3 \cdot 7$ ist linear.

3.4 Beispiel
Sei $P = [2]$, $\gamma = (\gamma 1, \gamma 2) \in M^P$. Sei $v \in M$, dann ist $\langle\gamma\rangle_1 v = (v, \gamma 2)$ und $\langle\gamma\rangle_2 v = (\gamma 1, v)$, also $F(\langle\gamma\rangle_1 v) = F(v, \gamma 2)$, $F(\cdot, \gamma 2)$ linear (in der ersten Komponente), und $F(\gamma 1, \cdot)$ linear (in der zweiten Komponente): F ist „bilinear“.

Mögliche Notation: $\gamma 1 \bullet \gamma 2 := F(\gamma)$. Dann $(v+w)\bullet\gamma 2 = v\bullet\gamma 2 + w\bullet\gamma 2$, $(s\cdot v)\bullet\gamma 2 = s\cdot(v\bullet\gamma 2)$ und $\gamma 1 \bullet (v + w) = \gamma 1 \bullet v + \gamma 2 \bullet w$, $\gamma 1 \bullet (s \cdot v) = s \cdot (\gamma 1 \bullet v)$. Allgemein gilt

$$\begin{aligned}&(s_1 v_1 + s_2 v_2) \bullet (t_1 w_1 + t_2 w_2)\\ &\qquad = s_1 t_1 (v_1 \bullet w_1) + s_1 t_2 (v_1 \bullet w_2) + s_2 t_1 (v_2 \bullet w_1) + s_2 t_2 (v_2 \bullet w_2).\end{aligned}$$

Sonderfall: Gelte hier $v \bullet v = \bar{0}$ für alle $v \in M$, so ist

$$\bar{0} = (v + w) \bullet (v + w) = v \bullet v + v \bullet w + w \bullet v + w \bullet w = v \bullet w + w \bullet v$$

für alle $v, w \in M$. Es folgt $v \bullet w + w \bullet v = 0$ für alle $v, w \in M$, das heißt $w \bullet v = -v \bullet w$ (für $\mathbb{S}$ Ring). F heißt dann *alternierend.*

Zum Beispiel: $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M}' = \mathbb{R}$, dann $F = \det : (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ ist alternierend. □

„Masterformel“ für multilineare Abbildungen (Ausmultiplizierung):

3.5 Satz
Sei $F : \mathcal{M}^P \to \mathcal{M}'$ multilinear (bezüglich P), und sei Q endliche nichtleere Menge. Zu $\alpha \in S^{P\times Q}$ und $\eta \in M^Q$ sei $\alpha * \eta : P \to M$, $p \mapsto (\alpha * \eta)p$ mit $(\alpha * \eta)p := \sum_{q\in Q} \alpha(p, q) \cdot \eta q$. Dann gilt:

$$F(\alpha * \eta) = \sum_{\sigma\in Q^P} \prod_{p\in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F(\eta \circ \sigma).$$

□

Interpretation: P Faktorenmenge, Q Summandenmenge pro Faktor $p \in P$, $\sigma : P \to Q$, $p \mapsto \sigma p$ ordnet jedem „Faktor“ p den Summanden an der Stelle σp zu. $\#Q^P$ Anzahl der Summanden nach dem Ausmultiplizieren.

Wir betrachten hier „homogenen Fall“, das heißt Elemente in $\mathcal{M}^P$ sind $p \mapsto \eta p \in M$, zum Beispiel $\mathcal{M}^{[2]} \equiv \mathcal{M} \times \mathcal{M}$; allgemeiner wäre $(\mathcal{M}_p)_{p\in P}$, also $p \mapsto \eta p \in M_p$, mit $\mathcal{M}_p$ abhängig von p, zum Beispiel $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

3.6 Beispiel
Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\\ &\qquad = (a_{11}x_1)(a_{21}x_1) + (a_{11}x_1)(a_{22}x_2) + (a_{12}x_2)(a_{21}x_1) + (a_{12}x_2)(a_{22}x_2)\\ &\qquad = a_{11}a_{21}x_1x_1 + a_{11}a_{22}x_1x_2 + a_{12}a_{21}x_2x_1 + a_{12}a_{22}x_2x_2\\ &\qquad = \sum_{(i,j)\in\{1,2\}^2} a_{1i}a_{2j}x_ix_j = \sum_{\sigma\in[2]^{[2]}} a_{1\sigma 1}a_{2\sigma 2}x_{\sigma 1}x_{\sigma 2}\\ &\qquad = \sum_{\sigma\in P^P} \prod_{p\in P} a_{p,\sigma p} \prod_{p\in P} x_{\sigma p}\end{aligned}$$

mit $P := [2]$, wobei $\sigma \in [2]^{[2]} : 1 \mapsto i$, $2 \mapsto j$ ($1, 2$ Faktoren, i, j Summanden).

Mit $Fx := F(x_1, x_2) := x_1 x_2$ (bilinear) ist

$$\prod_{p \in P} x_{\sigma p} = F(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}) = F(x \circ \sigma),$$

wobei $x \circ \sigma = ((x \circ \sigma)_p)_{p \in P} = (x_{\sigma p})_{p \in P}$.

Also ist wegen $\alpha * x = \sum_{(p,q) \in P \times P} a_{pq} \cdot x_q$ für $\alpha = (a_{pq})_{(p,q) \in P \times P}$ (das heißt $\alpha : P \times P \to S$ mit S Rechenbereich) dann $\alpha * x = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$, und somit

$$F(\alpha * x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \sum_{\sigma \in P^P} \prod_{p \in P} a_{p,\sigma p} \cdot F(x \circ \sigma).$$

□

3.7 Beispiel

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 x_2 x_3$. Notation für $F(x + y)$ ausmultipliziert (gesuchte Formel)?

$$\begin{aligned} F(x + y) &= (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) \\ &= x_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2x_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3 + y_1y_2y_3. \end{aligned}$$

$P = [3]$ Faktorenmenge, $Q = [2]$ Summandenmenge, $\sigma : P \to Q$ ordnet jedem Faktor p einen Summanden σp zu, zum Beispiel

p	1	2	3
σp	1	2	1

entspricht $x_1 y_2 x_3$.

Sei $\alpha(p, 1) := x_p$ „1. Summand des Faktors p", und $\alpha(p, 2) := y_p$ „2. Summand des Faktors p". Dann ist $(\alpha * \eta)p := \sum_{q \in Q} \alpha(p, q) \cdot \eta q = \alpha(p, 1) + \alpha(p, 2) = x_p + y_p$ für $\eta \in \mathbb{R}^2$ via $\eta = (1, 1)$. Also ist $\alpha * \eta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Also:

$$F(\alpha * \eta) = \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F(\eta \circ \sigma)$$

(σp ist der durch σ ausgewählte Summand im Faktor p), $\#Q^P = 2^3 = 8$.

Anmerkung: $\eta \circ \sigma = ((\eta \circ \sigma)p)_{p \in P} = (\eta(\sigma p))_{p \in P}$. □

3.8 Beispiel

$F : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \prod x$. Dann ist $F(\alpha * \eta) = \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p)$, falls $\eta : Q \to \mathbb{R}$, $q \mapsto 1$. □

Zum Beweis: Sei $\alpha' : P \times Q \to M$, $(p, q) \mapsto \alpha(p, q) \cdot \eta q$. Aus Multiadditivität und Skalare rausziehen folgt

$$\begin{aligned} F\Big(\big(\sum_{q \in Q} \alpha'(p, q)\big)_{p \in P}\Big) &= \sum_{\sigma \in Q^P} F\big((\alpha'(p, \sigma p))_{p \in P}\big) \\ &= \sum_{\sigma \in Q^P} F\big((\alpha(p, \sigma p) \cdot \eta(\sigma p))_{p \in P}\big) \\ &= \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F\big((\eta(\sigma p))_{p \in P}\big), \end{aligned}$$

wobei $(\eta(\sigma p))_{p \in P} = \eta \circ \sigma$.

3.2 Determinanten, Leibniz-Formel

Alternierende Abbildungen Sei $F : \mathcal{M}^P \to \mathcal{M}'$ multilineare Abbildung. Wir betrachten für $\gamma \in M^P$ folgende „Ersetzung an zwei Stellen“ $p_1, p_2 \in P$ mit $p_1 \neq p_2$:

$$\langle\gamma\rangle_{p_1,p_2} : M^2 \to M^P, \quad (v, w) \mapsto \langle\gamma\rangle_{p_1,p_2}(v, w),$$

wobei

$$\langle\gamma\rangle_{p_1,p_2}(v, w) : P \to M, \quad p \mapsto \begin{cases} v & \text{falls } p = p_1 \\ w & \text{falls } p = p_2 \\ \gamma p & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $P = [n]$, $\langle\gamma\rangle_{p_1,p_2}(v, w) = (\gamma 1, \dots, \underset{p_1\text{-te}}{v}, \dots, \underset{p_2\text{-te}}{w}, \dots, \gamma n)$.

Damit ist $F \circ \langle\gamma\rangle_{p_1,p_2} : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}'$ bilinear. Sei $v \cdot w := (F \circ \langle\gamma\rangle_{p_1,p_2})(v, w)$ und gelte $v \cdot v = 0$ für alle $v \in \mathcal{M}$, dann gilt $\bar{0} = (v + w) \cdot (v + w) = v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + w \cdot w = v \cdot w + w \cdot v$ und damit $w \cdot v = -v \cdot w$.

3.9 Definition
Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring. F ist *Determinantenabbildung*, falls $(F \circ \langle\gamma\rangle_{p_1,p_2})(v, v) = \bar{0}$ für alle $v \in M$ ist (das heißt $F(\gamma_1, \dots, \underset{p_1\text{-te}}{v}, \dots, \underset{p_2\text{-te}}{v}, \dots, \gamma n) = \bar{0}$ für $P = [n]$). □

Dann ist $(F \circ \langle\gamma\rangle_{p_1,p_2})(w, v) = -(F \circ \langle\gamma\rangle_{p_1,p_2})(v, w)$ ($\mathbb{S}$ Ring). F heißt dann *alternierend*.
Unsere Formel ist hier:

$$F(\alpha * \eta) = \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F(\eta \circ \sigma),$$

wobei $F(\eta \circ \sigma) = \bar{0}$, falls σ nicht injektiv. Im Fall $Q = P$, also $\alpha \in S^{P \times P}$, $\eta \in M^P$, gilt:

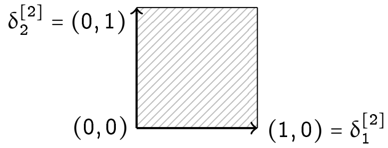
$$\begin{aligned} F(\alpha * \eta) &= \sum_{\sigma \in P^P} \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F(\eta \circ \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F\eta, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Sym}\, P$ Menge der Permutationen von P, und

$$\operatorname{sgn} \sigma := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \text{ gerade Permutation,} \\ -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade Permutation,} \\ 0 & \text{falls } \sigma \text{ nicht bijektiv;} \end{cases}$$

eine *gerade Permutation* ist eine Permutation der Form $\sigma = \tau_1 * \dots * \tau_{2n}$ für τ_i Transpositionen (Vertauschung zweier Elemente).

Determinanten $\det := F$ ist *Determinante*, falls $\mathcal{M} = \mathbb{S}^P := \mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P)$ und $\mathcal{M}' = \mathbb{S}$, sowie $\det \delta^P = 1$ (Volumen des durch δ^P induzierten Einheitshyperwürfels in M).



Formel für $\eta = \delta^P$ (Leibniz-Formel):

$$\det(r_\alpha) = \det(\alpha * \delta^P) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p),$$

da $F\eta = F\delta^P = \det \delta^P = 1$.

Zu $\alpha \in S^{P \times P}$ setze $\det \alpha := \det r_\alpha$, wobei $r_\alpha : P \to S^P$, $p \mapsto \alpha(p, \cdot)$. Dann lautet die Leibniz-Formel:

$$\det \alpha = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p).$$

Seien nun $\alpha, \beta \in S^{P \times P}$. Setze $\eta := r_\beta$. Dann gilt: $\alpha * \eta = \alpha * \beta$, also ist

$$\det(\alpha * \beta) = \det(\alpha * \eta) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \Big) \cdot \det \eta = \det \alpha \cdot \det \beta.$$

3.10 Satz (Determinanten-Multiplikationssatz)
Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring. Für alle $\alpha, \beta \in S^{P \times P}$ gilt

$$\det(\alpha * \beta) \;=\; \det \alpha \cdot \det \beta.$$

□

Außerdem gilt für $\alpha \in S^{P \times P}$ stets:

$$\begin{aligned} \det(\alpha^T) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha^T(p, \sigma p) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma^{-1} p) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) = \det \alpha, \end{aligned}$$

da $\alpha^T(p, \sigma p) = \alpha(\sigma p, p)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma$.

Ergebnis: $\det \alpha^T = \det \alpha$ für alle $\alpha \in S^{P \times P}$.

3.3 Multilineare Fortsetzung und Anwendungen

3.11 Satz (Existenz und Eindeutigkeit multilinearer Abbildungen)
Seien P und Q endliche nichtleere Mengen, und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ Moduln über einem kommutativen Semiring $\mathbb{S}$. Ferner sei $\eta : Q \to M$ eine Basis von $\mathcal{M}$; setze $\eta^P : Q^P \to M^P$, $\sigma \mapsto \eta \circ \sigma$.

Dann existiert zu jeder Abbildung $\Phi : Q^P \to M'$ genau eine bezüglich P multilineare Abbildung F von $\mathcal{M}^P$ nach $\mathcal{M}'$ mit $F \circ \eta^P = \Phi$.

Im Diagramm (laxe Version):

$$\begin{tikzcd} & Q^P \arrow[dl, "\eta^P"'] \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ \mathcal{M}^P \arrow[rr, "\exists!\, F"'] & & \mathcal{M}' \end{tikzcd}$$

Genauer:

$$\begin{tikzcd} & Q^P \arrow[dl, "\eta^P"'] \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ M^P \arrow[rr, "F"'] & & M' \end{tikzcd}$$

und $\mathcal{M}^P \xrightarrow{F} \mathcal{M}$ *multilinear bzgl.* P.

□

Wir nennen F die *multilineare Fortsetzung* (bezüglich P) von Φ bezüglich η.

Beweis

Eindeutigkeit: Sei F wie im Satz gegeben. Dann gilt für jedes $\gamma \in M^P$: Zu jedem $p \in P$ existiert genau ein $\lambda^{(p)} \in S^Q$ mit $\gamma p = \lambda^{(p)} * \eta$ (da η Basis von $\mathcal{M}$). Für $\alpha : P \times Q \to S$, $(p, q) \mapsto \lambda^{(p)} q$ folgt $\gamma = \alpha * \eta$ (denn $\gamma p = \lambda^{(p)} * \eta = \sum_{q \in Q} \lambda^{(p)} q \cdot \eta q = \sum_{q \in Q} \alpha(p, q) \cdot \eta q = (\alpha * \eta) p$ für alle $p \in P$). Unsere „Masterformel“ impliziert nun

$$F\gamma = F(\alpha * \eta) = \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F(\eta \circ \sigma) = \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \lambda^{(p)}(\sigma p) \cdot \Phi(\sigma),$$

denn $\alpha(p, \sigma p) = \lambda^{(p)}(\sigma p)$, $F(\eta \circ \sigma) = F(\eta^P(\sigma)) = (F \circ \eta^P)\sigma = \Phi(\sigma)$.

Existenz: Definiere $F : M^P \to M'$ für jedes $\gamma \in M^P$ mit $\gamma p = \lambda^{(p)} * \eta$, wobei $\lambda^{(p)} \in S^Q$ für alle $p \in P$, wie folgt:

$$F\gamma := \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \lambda^{(p)}(\sigma p) \cdot \Phi(\sigma).$$

Überprüfe:

1. F ist bezüglich P multilinear von $\mathcal{M}^P$ nach $\mathcal{M}'$.

   Begründung: Sei $\gamma \in M^P$ und $p_0 \in P$ fest gewählt, und sei $\gamma p = \lambda^{(p)} * \eta$ mit $\lambda^{(p)} \in S^Q$ für alle $p \in P$. Für alle $x \in S^Q$ folgt, wobei $f := F \circ \langle \gamma \rangle_{p_0} : M \to M'$ sei $f(x * \eta) = \sum_{\sigma \in Q^P} x(\sigma p_0) \cdot \prod_{p \in P \setminus \{p_0\}} \lambda^{(p)}(\sigma p) \cdot \Phi(\sigma) =: \sum_{\sigma \in Q^P} x(\sigma p_0) \cdot l\sigma$.

   Für $x, y \in S^Q$ folgt $f(x * \eta + y * \eta) = f((x + y) * \eta) = \sum_{\sigma \in Q^P} (x + y)(\sigma p_0) \cdot l\sigma = \sum_{\sigma \in Q^P} x(\sigma p_0) \cdot l\sigma + \sum_{\sigma \in Q^P} y(\sigma p_0) \cdot l\sigma = f(x * \eta) + f(y * \eta)$, also $f(v + w) = fv + fw$ für alle $v, w \in M$. Entsprechend ist $f(s \cdot v) = s \cdot fv$ für $s \in S$.

2. $F \circ \eta^P = \Phi$.

   Begründung: Für jedes $\sigma_0 \in Q^P$ ist $(F \circ \eta^P)\sigma_0 = \sum_{\sigma \in Q^P} \prod_{p \in P} \delta^Q_{\sigma_0 p}(\sigma p) \cdot \Phi(\sigma) = \Phi(\sigma_0)$ (wegen $(\eta \circ \sigma_0)p = \eta(\sigma_0 p) = \delta^Q_{\sigma_0 p} * \eta$ und $\prod_{p \in P} \delta^Q_{\sigma_0 p}(\sigma p) = 0$ für $\sigma \neq \sigma_0$).■

Determinanten Spezialfall: $Q = P$, $\mathcal{M} = \mathbb{S}^P$ ($M = S^P$), $\mathbb{S}$ kommutativer Ring, und $\eta = \delta^P$, sowie $\Phi = \operatorname{sgn} : P^P \to \mathbb{R}$, $\sigma \mapsto \operatorname{sgn} \sigma$,

$$\operatorname{sgn} \sigma := \begin{cases} 0 & \text{falls } \sigma \text{ nicht injektiv,} \\ 1 & \text{falls } \sigma \text{ gerade Permutation,} \\ -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade Permutation.} \end{cases}$$

Dann ist die eindeutig bestimmte multilineare Abbildung det von $(\mathbb{S}^P)^P$ nach $\mathbb{S}$ mit $\det \circ (\delta^P)^P = \operatorname{sgn}$ die Determinantenfunktion auf $(\mathbb{S}^P)^P$.

$$\begin{tikzcd} & P^P \arrow[dl, "(\delta^P)^P"'] \arrow[dr, "\operatorname{sgn}"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ (\mathbb{S}^P)^P \arrow[rr, "\det"'] & & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

Also ist die Determinante det die multilineare Fortsetzung von $\operatorname{sgn} : P^P \to S$ bezüglich der Standardbasis δ^P.

Bilinearformen Sei hier $P = [2]$, $\mathcal{M}' = \mathbb{S}$ kommutativer Semiring ($X^{[2]} \equiv X \times X$).

$$\begin{tikzcd} & I^{[2]} \arrow[dl, "\eta^{[2]}"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ \mathcal{M}^{[2]} \arrow[rr, "b"'] & & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

Dann ist b die bilineare Fortsetzung der Matrix $\beta : I \times I \to S$, also $b \circ \eta^{[2]} = \beta$, das heißt $b(\eta i, \eta j) = \beta(i, j)$ für alle $i, j \in I$. Es heißt b dann *Bilinearform* zu β bezüglich η.

Ist b gegeben, so nennt man $\beta := b \circ \eta^{[2]}$, das heißt

$$\beta : I \times I \to S, \quad (i, j) \mapsto b(\eta i, \eta j)$$

die *Gramsche Matrix* zu b.

Sind $v, w \in M$ und $\lambda, \mu \in S^I$ mit $v = \lambda * \eta$ und $w = \mu * \eta$, so ist

$$b(v, w) = \sum_{(i,j) \in I \times I} \lambda i \cdot \mu j \cdot \beta(i, j).$$

Also ist $b(v, w) = \lambda * \beta * \mu$, wobei $\lambda * \beta = \sum_{i \in I} \lambda i \cdot \beta(i, \cdot)$ und $\beta * \mu = \sum_{j \in I} \beta(\cdot, j) \cdot \mu j$.

Für alle $\lambda, \mu \in S^I$ ist insgesamt

$$b(\lambda * \eta, \mu * \eta) = \lambda * \beta * \mu.$$

Sonderfall: $\eta = \delta^J$ Standardbasis, $\mathcal{M} = \mathbb{S}^J$ (Umbenennung: ersetze I durch J). Dann $\lambda * \eta = \lambda * \delta^J = \lambda$ für $\lambda \in S^J$. Also hier

$$b(\lambda, \mu) = \lambda * \beta * \mu.$$

Sei $\eta = \delta^J$ und $\beta = I_J : J \times J \to S,\ (i,j) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann $b(\lambda, \mu) = \lambda * I_J * \mu = \lambda * \mu$ ist Elementarfaltung von λ mit μ für alle $\lambda, \mu \in S^J$. Es heißt b das *Standard-Skalarprodukt* auf $\mathbb{S}^J$. Für $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ ist b das euklidische Skalarprodukt.

3.4 Cramersche Regel

Noch einmal zu Determinanten: Sei $\mathbb{S}$ Ring, $\alpha \in S^{P \times P}$ und $\nu \in S^P$. Gesucht sei $x \in S^P$ mit $x * \alpha = \nu$, das heißt $\sum_{p \in P} xp \cdot \alpha(p, \cdot) = \nu$.

Setze $\gamma := r_\alpha$. Also $x * \alpha = \nu$ besagt $x * \gamma = \sum_{p \in P} xp \cdot \gamma p = \nu$. Für jedes $p \in P$ ist

$$\begin{aligned} \det(\langle\gamma\rangle_p\, \nu) &= \det(\langle\gamma\rangle_p\, (\sum_{p' \in P} xp' \cdot \gamma p')) \\ &= \sum_{p' \in P} xp' \cdot \det(\langle\gamma\rangle_p\, \gamma p') \\ &= xp \cdot \det \gamma, \end{aligned}$$

denn $\det(\langle\gamma\rangle_p\, \gamma p') = \begin{cases} \gamma & \text{falls } p = p', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ergebnis:

$$\det(\langle\gamma\rangle_p\, \nu) \ = \ x_p \cdot \det \gamma.$$

Wegen $\det \alpha = \det r_\alpha = \det \gamma$ folgt („Cramer“)

$$\det(\langle r_\alpha\rangle_p\, \nu) \ = \ x_p \cdot \det \alpha,$$

falls $x * \alpha = \nu$. Dabei ist $\langle r_\alpha\rangle_p\, \nu$ die Ersetzung der p-ten Zeile von α durch ν.

3.12 Beispiel
Sei $n = 3,\ P = [n] = 3$, und sei

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

also $\gamma 1 = \alpha(1, \cdot) = (1,2,3)$, $\gamma 2 = \alpha(2, \cdot) = (4,5,6)$, $\gamma 3 = \alpha(3, \cdot) = (7,8,9)$, $\gamma = (\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3) = ((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)) \in (\mathbb{N}^3)^3 = (\mathbb{N}^{[3]})^{[3]}$. Sei $p = 2$ und $\nu = (10,11,12)$, dann ist $\langle\gamma\rangle_2\, \nu = (\gamma 1, \nu, \gamma 3) = ((1,2,3),(10,11,12),(7,8,9))$, als Matrix

$$m(\langle\gamma\rangle_2\, \nu) = \begin{pmatrix} \gamma 1 \\ \nu \\ \gamma 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

□

Ist $\det \gamma$ in $\mathbb{S}_{\text{mult}}$ invertierbar und $x * \alpha = \nu$, so gilt

$$x_p = \frac{\det(\langle r_\alpha\rangle_p\, \nu)}{\det \alpha}.$$

Adjunkte Setze $\nu := \delta^P_q$ und betrachte $x^{(q)} * \alpha = \delta^P_q$, also gilt $x^{(q)}_p \cdot \det \alpha = \det \langle r_\alpha \rangle_p \, \delta^P_q$.

3.13 Definition

Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring und P endliche nichtleere Menge. Zur Matrix $\alpha \in S^{P\times P}$ setze

$$\operatorname{adj} \alpha : P \times P \to S, \quad (q,p) \mapsto \det \langle r_\alpha \rangle_p \, \delta^P_q,$$

dann ist die Matrix $\operatorname{adj} \alpha \in S^{P\times P}$ die sogenannte *Adjunkte* zu α. □

Für $P = [n]$ ist (semiformal)

$$\det \langle r_\alpha \rangle_p \, \delta^P_q = \det \begin{pmatrix} \alpha(1,1) & \dots & \alpha(1,q) & \dots & \alpha(1,n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha(p-1,1) & \dots & \alpha(p-1,q) & \dots & \alpha(p-1,n) \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \alpha(p+1,1) & \dots & \alpha(p+1,q) & \dots & \alpha(p+1,n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha(n,1) & \dots & \alpha(n,q) & \dots & \alpha(n,n) \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{p+q} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha(1,1) & \dots & \alpha(1,q-1) & \alpha(1,q+1) & \dots & \alpha(1,n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha(p-1,1) & \dots & \alpha(p-1,q-1) & \alpha(p-1,q+1) & \dots & \alpha(p-1,n) \\ \alpha(p+1,1) & \dots & \alpha(p+1,q-1) & \alpha(p+1,q+1) & \dots & \alpha(p+1,n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha(n,1) & \dots & \alpha(n,q-1) & \alpha(n,q+1) & \dots & \alpha(n,n) \end{pmatrix}$$

(Streichungsmatrix zu (p,q), „streiche p-te Zeile und q-te Spalte von α“).

Dann gilt also stets („Cramersche Regel“):

$$(\operatorname{adj} \alpha) * \alpha = (\det \alpha) \cdot I_P.$$

Anmerkungen:

1. Daraus ergibt sich für $\alpha \in S^{P\times P}$: Es ist α multiplikativ invertierbar in $\mathrm{Mat}_P\, \mathbb{S}$ genau dann, wenn $\det \alpha$ multiplikativ invertierbar in $\mathbb{S}$ ist.

   Zusatz: Ist $\det \alpha$ invertierbar in $\mathbb{S}_{\mathrm{mult}}$, so gilt
   $$\alpha^{-1} = \frac{1}{\det \alpha} \cdot \operatorname{adj} \alpha.$$

2. Genau genommen benötigt man in 1., dass auch $\alpha * (\operatorname{adj} \alpha) = (\det \alpha) \cdot I_P$ gilt.

Beachte dazu Folgendes: Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring. Dann ist auch $\mathbb{S}^{\mathrm{op}} := (S, +, \cdot^{\mathrm{op}}, 0, 1)$ Semiring, wobei

$$\cdot^{\mathrm{op}} : S \times S \to S, \quad (y,x) \mapsto x \cdot y$$

die transponierte Multiplikation bezeichne (op “opposite”). Also ist $y \cdot^{\mathrm{T}} x := x \cdot y$.

Zu $\beta \in S^{P\times Q}$ ist $\beta^T : Q \times P \to S$, $(q,p) \mapsto \beta(p,q)$, also $\beta^T(q,p) := \beta(p,q)$, die transponierte Matrix. Für endliche Mengen P, T, Q seien $\alpha \in S^{P\times T}$ und $\beta \in S^{T\times Q}$, also $\beta^T \in S^{Q\times T}$, $\alpha^T \in S^{T\times P}$. Dann gilt $(\alpha * \beta)^T = \beta^T *^{(T)} \alpha^T$, wobei

$$(\beta^T *^{(T)} \alpha^T)(q,p) := \sum_{t\in T} \beta^T(q,t) \cdot^{op} \alpha^T(t,p),$$

denn $\sum_{t\in T} \beta^T(q,t) \cdot^{op} \alpha^T(t,p) = \sum_{t\in T} \alpha^T(t,p) \cdot \beta^T(q,t) = \sum_{t\in T} \alpha(p,t) \cdot \beta(t,q)$ für alle $(p,q) \in P \times Q$

Ist $\mathbb{S}$ kommutativer Semiring, dann ist $\cdot^T = \cdot$ und folglich $(\alpha * \beta)^T = \beta^T * \alpha^T$.

Anwendung für 1.: Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring, $\alpha \in S^{P\times P}$. Dann ist $(\operatorname{adj}\alpha) * \alpha = \det\alpha \cdot I_P$. Weil $(\alpha^T)^T = \alpha$ und $(\operatorname{adj}\alpha^T) * \alpha^T = \det(\alpha^T) \cdot I_P = \det\alpha \cdot I_P$ ist, gilt $\alpha * (\operatorname{adj}\alpha^T)^T = (\det\alpha \cdot I_P)^T = \det\alpha \cdot I_P$, das heißt α hat beidseitiges Inverses, falls $\det\alpha$ invertierbar ist.

Ist $\mathbb{S}$ Körper, so folgt: $\det\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$ invertierbar, und $\det\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1} = \frac{1}{\det\alpha} \cdot \operatorname{adj}\alpha$.

Beispiel: Sei $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$ und $\det\alpha = 2$, ist nicht invertierbar in $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, also ist α nicht invertierbar.

3.5 Elementargeometrie in euklidischen Vektorräumen

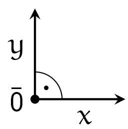
Sei N endliche nichtleere Menge, und sei $b : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $(x,y) \mapsto x * y$ mit

$$x * y := \sum_{i\in N} x_i y_i$$

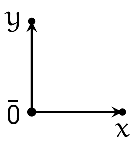
das *euklidische Skalarprodukt* zu N (Elementarfaltung von x mit y, andere Bezeichnung: $\langle x,y\rangle = x * y$). Dann heißt $\mathbb{E}^N := (\mathbb{R}^N, b)$ der *euklidische Vektorraum* zu N.

Das euklidische Skalarprodukt $b(x,y) = x*y = \sum_{i\in I} x_i y_i$ hat die Eigenschaften $b(x,y) = b(y,x)$, $b(x,x) \geq 0$ und $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$, das heißt, b ist symmetrische und positiv definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^N$.

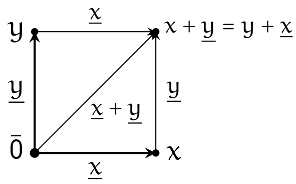
In $\mathbb{E}^N$ lassen sich Orthogonalität, Winkel und Abstände beschreiben. Für $x, y \in \mathbb{R}^N$ nennen wir x *orthogonal* zu y, kurz $x \perp y$, falls $x * y = 0$.



Andere Sicht: $x, y \in \mathbb{R}^N$ als Punkte interpretierbar:



Auch beides geht:



Punkte vs Vektoren Sei $\overrightarrow{pq} := -p + q$ Vektor vom Punkt $p \in \mathbb{R}^N$ zum Punkt $q \in \mathbb{R}^N$. Abstrakte Modellierung: P sei Menge, $\mathrm{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N$ sei Abbildung mit $\mathrm{vec}(p, \cdot) : P \to \mathbb{R}^N$ bijektiv und $\mathrm{vec}(p, t) + \mathrm{vec}(t, q) = \mathrm{vec}(p, q)$ für alle $p, q \in P$. Wir nennen $\mathcal{P} := (P, P \times P)$ *Punktraum* und vec *vektorielle Abbildung* von $\mathcal{P}$ nach $\mathbb{R}^N$.

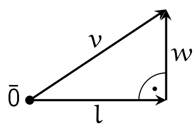
Dann $\overrightarrow{pq} := \mathrm{vec}(p, q)$ für alle $p, q \in P$ (oft $P \cap \mathbb{R}^N = \varnothing$).

Bei uns (Modell) ist (leider) $P = \mathbb{R}^N$ als Menge, während $\mathbb{R}^N = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, N)$ der zugrundeliegende Vektorraum ist, und

$$\mathrm{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N, \quad (p, q) \mapsto \overrightarrow{pq} := -p + q.$$

Dann ist $\mathrm{vec}(p, \cdot) : P \to \mathbb{R}^N$, $q \mapsto \overrightarrow{pq} = -p + q$ bijektiv. Ausgezeichnet als Ursprung ist $p = \bar{0} \in \mathbb{R}^N$, $\mathrm{vec}(\bar{0}, \cdot) : P \to \mathbb{R}^N$, $q \mapsto \overrightarrow{\bar{0}q} = q$.

Bestimmung von Lotfußpunkten Satz des Pythagoras (vektorielle Version): Seien $v, l, w \in \mathbb{R}^N$ mit $l + w = v$ und $l \perp w$.

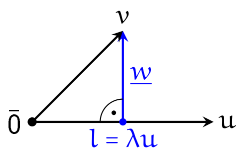


Dann gilt:

$$l * l + w * w = v * v.$$

Begründung: $v * v = (l + w) * (l + w) = l * l + 2(l * w) + w * w = l * l + w * w$, da $l * w = 0$.

Sei $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{\bar{0}\}$ und sei $v \in \mathbb{R}^N$. Bestimme den *Lotfußpunkt* l von v auf $\mathbb{R}u$, das heißt finde $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $l = \lambda u$ und $u \perp w$, wobei $w = \overrightarrow{lv} = -\lambda u + v$.



Die Bedingung $u \perp w = -\lambda u + v$ heißt $u * (-\lambda u + v) = 0$, also $-\lambda(u * u) + u * v = 0$, das heißt $\lambda = \frac{u*v}{u*u}$. Ergebnis: $l = \lambda u$ mit $\lambda = \frac{u*v}{u*u}$.

Setze für $v \in \mathbb{R}^N$ stets $\|v\| := \sqrt{v * v} = (v * v)^{\frac{1}{2}}$ „Norm des Vektors v" (beachte $v * v = \sum_{i \in N} v_i^2 \geq 0$), und sei $d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $(p, q) \mapsto \|\overrightarrow{pq}\| =: d(p, q)$ der „euklidische Abstand von p zu q".

Anwendung: Herleitung „CSU" (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Gegeben $v, u \in \mathbb{R}^N \setminus \{\bar{0}\}$. Sei l Lotfußpunkt zu v auf $\mathbb{R}u$, und sei $w := \overrightarrow{lv}$. Pythagoras ergibt:

$$l * l + w * w = v * v \quad \Rightarrow \quad 0 \le d(l, v)^2 = w * w = v * v - l * l.$$

Wegen $l = \lambda u$ mit $\lambda = \frac{u*v}{u*u}$ folgt $0 \le v * v - l * l = v * v - \lambda^2 \cdot u * u = v * v - \frac{(u*v)^2}{u*u}$, das heißt $(u * v)^2 \le (u * u) \cdot (v * v)$, also

$$|u * v| \le \|u\| \cdot \|v\|.$$

Also „elementargeometrisch gesehen":

$$0 \le \sin^2 \angle(u, v) = \frac{(\text{Gegenkathete})^2}{(\text{Hypothenuse})^2} = \frac{w * w}{v * v} = 1 - \frac{(u * v)^2}{(u * u) \cdot (v * v)} \quad \text{(liefert CSU)},$$
$$\cos^2 \angle(u, v) = \frac{(\text{Ankathete})^2}{(\text{Hypothenuse})^2} = \frac{l * l}{v * v} = \frac{(u * v)^2}{(u * u) \cdot (v * v)} = \left(\frac{(u * v)}{\|u\| \cdot \|v\|}\right)^2,$$

also $-1 \le \cos \angle(u, v) := \frac{u*v}{\|u\| \cdot \|v\|} \le 1$, das heißt $\angle(u, v) = \arccos\left(\frac{u*v}{\|u\|\cdot\|v\|}\right) \in [0, \pi]$.

Orthonormalsysteme

3.14 Definition

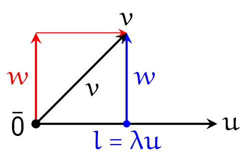
Ein *Orthogonal-System* in $\mathbb{E}^N$ ist $\gamma : P \to \mathbb{R}^N$ mit $\gamma i \ne \bar{0}$ für alle $i \in P$ (sonst *schwaches* Orthogonal-System), so dass $\gamma i \perp \gamma j$ für alle $i, j \in P$ mit $i \ne j$ gilt. Gilt zusätzlich $\|\gamma i\| = 1$ für alle $i \in P$, so heißt γ *Orthonormal-System* (ON-System) in $\mathbb{E}^N$. □

Es ist also $\gamma : P \to \mathbb{R}^N$ ein ON-System in $\mathbb{E}^N$ genau dann, wenn

$$\gamma i * \gamma j = I_N(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $(i, j) \in N \times N$ gilt.

Seien u, v linear unabhängig (also $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ ist 2-dimensional), dann $w \ne \bar{0}$ und $w \perp u$, „w orthogonalisisiert v zu $\mathbb{R}u$".



Allgemein für V Vektorraum und $\gamma : P \to V$ sei $\operatorname{rang} \gamma := \operatorname{Dim} \langle \gamma \rangle = \operatorname{Dim} \operatorname{Im} f_\gamma$.

3.15 Proposition (Gram-Schmidtsches ON-Verfahren)

Sei $k \in \mathbb{N}_+$, setze $P := [k]$. Sei $\gamma : P \to \mathbb{R}^N$ unabhängig (das heißt f_γ injektiv), also $\operatorname{rang}(\gamma) = k$. Dann existiert $\eta : P \to \mathbb{R}^N$ ON-System mit $\langle \eta 1, \dots, \eta j \rangle = \langle \gamma 1, \dots, \gamma j \rangle$ für alle $j \in P$ (das heißt $\sum_{i \in [j]} \mathbb{R}\eta i = \sum_{i \in [j]} \mathbb{R}\gamma i$). □

Beweis

Vorüberlegung: Ist $\gamma' : [j] \to \mathbb{R}^n$ und $x \perp \gamma' i$ für alle $i \in [j]$, dann ist $x \perp \sum \gamma' = \sum_{i \in [j]} \gamma' i$. Denn $x * \sum_{i \in [j]} \gamma' i = \sum_{i \in [j]} x * \gamma' i = 0$.

Setze $\eta 1 := \frac{\gamma 1}{\|\gamma 1\|}$, und für $h \in [k-1]$ sei $\eta(h+1) := \frac{\eta'(h+1)}{\|\eta'(h+1)\|}$, sowie

$$\eta'(h+1) := \gamma(h+1) - \sum_{i \in [h]} (\gamma(h+1) * \eta i)\eta i$$

(i-ter Summand ist Lotfußpunkt von $\gamma(h+1)$ auf $\mathbb{R}\eta i$).

Zu zeigen: $\eta'(h+1) \perp \eta j$ für jedes $j \in [h]$.

Nach Induktionsannahme $\langle \gamma 1, \ldots, \gamma h \rangle = \langle \eta 1, \ldots, \eta h \rangle$ und $\eta | [h]$ ON-System. Dann ist $\eta'(h+1) * \eta j = \gamma(h+1) * \eta j - \sum_{i \in [h]} (\gamma(h+1) * \eta i)\eta i * \eta j = \gamma(h+1) * \eta j - \gamma(h+1) * \eta j = 0$, somit $\eta'(h+1) \perp \eta j$, also $\eta(h+1) \perp \eta j$. ∎

Euklidische Räume Möglichkeit den $\mathbb{R}^N$ als Punktmenge zu konstruieren:

Sei $P := \mathbb{R}^N \times \{\text{Punkt}\}$ und sei

$$\mathrm{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N, \quad ((v, \text{Punkt}), (w, \text{Punkt})) =: (P(v), P(w)) \mapsto -v + w.$$

Ist $p = P(v) = (v, \text{Punkt})$, $q = P(w) = (w, \text{Punkt})$, dann $\overrightarrow{pq} := \mathrm{vec}(p, q) = -v + w =$ „$\overrightarrow{vw}$". Damit ist $\mathbb{R}^N$ als Punktraum modelliert,

$$(P, \mathrm{vec}, \mathbb{R}^N \equiv \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, N))$$

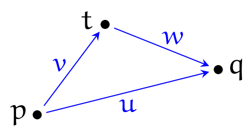
ist *vektorieller Punktraum* zum $\mathbb{R}^N$ und $\mathcal{E}^N := (P, \mathrm{vec}, \mathbb{E}^N)$ ist *euklidischer Raum* zu N. Die Abbildung

$$d : P \times P \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (p, q) \mapsto d(p, q) := \|\mathrm{vec}(p, q)\|$$

heißt *euklidische Metrik* (bzw. euklidischer Abstand, euklidische Distanz) auf $\mathcal{E}^N$, wobei $\|x\| := \sqrt{x * x}$ die *euklidische Norm* von $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne.

Dies ist eine Metrik:

- $d(p, p) = 0$,
  da $\|\mathrm{vec}(p, p)\| = 0$ ist, da $\mathrm{vec}(p, p) + \mathrm{vec}(p, p) = \mathrm{vec}(p, p)$, also $\mathrm{vec}(p, p) = \bar{0}$;
- $d(p, q) = d(q, p)$ für alle $p, q \in P$,
  da $\mathrm{vec}(q, p) = -\mathrm{vec}(p, q)$ (da $\mathrm{vec}(p, q) + \mathrm{vec}(q, p) = \mathrm{vec}(p, p) = \bar{0}$),
- $d(p, q) \leq d(p, t) + d(t, q)$ für alle $p, q, t \in P$ (Dreiecks-Ungleichung),
  denn sei $u := \mathrm{vec}(p, q)$, $v := \mathrm{vec}(p, t)$, $w := \mathrm{vec}(t, q)$, also $d(p, q) = \|u\|$, $d(p, t) = \|v\|$, $d(t, q) = \|w\|$, dann ist $u = v + w$, also zeige: $\|u\| = \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.



Es ist $\|v + w\|^2 = (v + w) * (v + w) = v * v + 2v * w + w * w$, und $(\|v\| + \|w\|)^2 = \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$. Wegen CSU ist $v * w \leq \|v\| \cdot \|w\|$, woraus (wegen $v * v = \|v\|^2$ und $w * w = \|w\|^2$) sofort $\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$ folgt, also $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Eine Abbildung $\varphi : P \to P$ heißt *Bewegung* des $\mathcal{E}^N$, falls φ abstandstreu ist, das heißt

$$d(\varphi p, \varphi q) = d(p, q)$$

für alle $p, q \in P$, wobei d die euklidische Distanz sei.

3.16 Satz
Ist $\varphi : P \to P$ Bewegung, dann ist

$$\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad v \mapsto \psi v := \operatorname{vec}\big(\varphi(o), \varphi(P(v))\big),$$

wobei $o := P(\bar{0}) = (\bar{0}, Punkt) \in P$, eine orthogonale Abbildung des $\mathbb{E}^N$.

Fall $P = \mathbb{R}^N$: Sei φ affin-orthogonal, *falls $\psi v = -\varphi\bar{0} + \varphi v$ orthogonale Abbildung ψ auf $\mathbb{E}^N$ definiert ($-\varphi\bar{0}$ Translationsanteil). Affin orthogonal entspricht dann einer Bewegung im $\mathcal{E}^N$.* □

Vektorieller Punktraum Sei P „Punktmenge" (Menge interpretiert als Punktmenge), N endliche Menge, dann ist $(P, \operatorname{vec}, \mathbb{R}^N)$ *vektorieller Punktraum* (bzw. *affiner Raum*), falls $\operatorname{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N$ vektorielle Abbildung auf $(\mathcal{N}(P, P \times P), *, \mathrm{id})$ ist, wobei $\mathcal{N}(P, P \times P) := (P, P \times P, \mathrm{id}_{P \times P})$ das „logistische Netzwerk" zu P sei.

Die Kanten von $\mathcal{N}(P, P \times P)$ heißen „syntaktische Vektoren" zu P (also $P \times P$ Menge der syntaktischen Vektoren) und P ist Menge von „Punkten". Es ist

$$(p, t) * (t, q) := (p, q)$$

das „Weglassprodukt" von (p, t) mit (t, q) (*syntaktische Verkettung* zwischen syntaktischen Vektoren), $\mathrm{id}\, p := (p, p)$ „synaktischer ID-Loop" von $p \in P$, und $(\mathcal{N}(P, P \times P), *, \mathrm{id})$ „syntaktischer Punktraum" zu P.

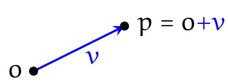
$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dr, "{(t,q)}"] & \\ p \arrow[ur, "{(p,t)}"] \arrow[rr, "{(p,q)}"'] & & q \end{tikzcd}$$

Abbildung $\operatorname{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N$ *vektoriell* bedeute, dass

$$\operatorname{vec}\big((p, t) * (t, q)\big) = \operatorname{vec}(p, t) + \operatorname{vec}(t, q),$$

das heißt $\operatorname{vec}(p, q) = \operatorname{vec}(p, t) + \operatorname{vec}(t, q)$, für alle $p, t, q \in P$ gilt ($\operatorname{vec}(p, t)$, $\operatorname{vec}(t, q)$ sind „semantische Vektoren", $+$ ist *semantische Verkettung* zwischen semantischen Vektoren). Ferner sei $\operatorname{vec}(p, \cdot) : P \to \mathbb{R}^N$ bijektiv für jedes $p \in P$.

Sei $o \in P$, $\operatorname{vec}(o, \cdot)$ bijektiv heißt: Zu jedem $v \in \mathbb{R}^N$ existiert genau ein $p \in P$ mit $\operatorname{vec}(o, p) = v$. Notation: $o + v =: p$.



3.17 Beispiel

1. Sei $P := \mathbb{R}^N \times \{\text{Punkt}\}$, setze $P(v) := (v, \text{Punkt})$, also $P : \mathbb{R}^N \to P$, $v \mapsto (v, \text{Punkt})$ ist Bijektion, und
$$\mathrm{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N, \quad (P(v), P(w)) \mapsto -v + w$$
ist vektoriell, denn $\mathrm{vec}(P(v), P(u)) + \mathrm{vec}(P(u), P(w)) = (-v + u) + (-u + w) = -v + w = \mathrm{vec}(P(v), P(w))$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$, und $\mathrm{vec}(P(v), \cdot) : P \to \mathbb{R}^N$, $P(w) \mapsto \mathrm{vec}(P(v), P(w)) = -v + w$ ist bijektiv für jedes feste $v \in \mathbb{R}^N$.

2. „brutal", „hoch ambivalent", Punkte vs (semantische) Vektoren: Sei $P = \mathbb{R}^N$, dann
$$\mathrm{vec} : P \times P \to \mathbb{R}^N, \quad (p, q) \mapsto -p + q =: \overrightarrow{pq} = \mathrm{vec}(p, q)$$
ist vektoriell, da $\mathrm{vec}(p, t) + \mathrm{vec}(t, q) = (-p + t) + (-t + q) = -p + q = \mathrm{vec}(p, q) = \mathrm{vec}((p, t) * (t, q))$ für alle $p, q, t \in P$, und $\mathrm{vec}(p, \cdot) : P \to \mathbb{R}^N$, $q \mapsto -p + q = \mathrm{vec}(p, q)$ ist bijektiv für jedes feste $p \in P$. $\square$

4 Charakteristisches Polynom

Ist $\alpha \in S^{P\times P}$ invertierbar in $\mathrm{Mat}_P\,\mathbb{S}$, wobei $\mathbb{S}$ Semiring, P endliche nichtleere Menge, so heißt α *regulär*. Es sei $\mathrm{GL}_P\,\mathbb{S}$ die Menge aller regulären Matrizen $\alpha \in S^{P\times P}$.

Sei $\mathbb{S}$ Körper, für $\gamma \in (S^P)^P$ ist

$$\operatorname{rang}\gamma := \operatorname{Dim}\langle\gamma\rangle = \operatorname{Dim}\sum_{i\in P} S\gamma i = \operatorname{Dim}\operatorname{Im} f_\gamma,$$

dann $\operatorname{rang}\alpha := \operatorname{rang} r_\alpha$ maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von α, „Zeilenrang von α“. Es gilt $\operatorname{rang}\alpha = \operatorname{rang} c_\alpha$ „Spaltenrang von α“, also „Zeilenrang = Spaltenrang“.

Ausblick Sei P endliche nichtleere Menge. Eine binäre Relation R auf P ist *azyklisch*, falls das Netzwerk $\mathcal{N}(P,R)$ keine Kreise enthält. Ist $R \setminus \operatorname{diag} P$ azyklisch, so nennen wir R *fast azyklisch* (hierbei bezeichnet $\operatorname{diag} P := \{(p,p) \mid p \in P\}$ die Diagonale von P).

Sei $\mathbb{S}$ Semiring. Eine Matrix $\alpha \in S^{P\times P}$ heißt *Trigonalmatrix*, falls $\operatorname{supp}\alpha := \{(p,q) \in P\times P \mid \alpha(p,q) \neq 0\}$ fast azyklisch ist. Man nennt $\alpha \in S^{P\times P}$ *ähnlich* zu $\alpha' \in S^{P\times P}$ in $\mathrm{Mat}_P\,\mathbb{S}$, falls ein $\beta \in \mathrm{GL}_P\,\mathbb{S}$ mit $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$ existiert. Eine Matrix ist *trigonalisierbar*, falls sie ähnlich zu einer Trigonalmatrix ist.

4.1 Satz
Ist $\mathbb{S}$ kommutativer Ring und $\alpha \in S^{P\times P}$ Trigonalmatrix, dann

$$\det\alpha = \prod_{i\in P}\alpha(i,i).$$

□

Für $\alpha^\# := \operatorname{adj}\alpha$ Adjunkte zu α, also $\alpha^\#(j,i) = \langle r_\alpha\rangle_i\,\delta^P_j$, gilt

$$\alpha * \alpha^\# = \det\alpha \cdot I_P = \alpha^\# * \alpha.$$

Daher folgt: Ist α Trigonalmatrix, dann ist α regulär genau dann, wenn $\alpha(i,i) \in \mathbb{S}^\times$ für alle $i \in P$ ist, wobei $\mathbb{S}^\times$ die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbb{S}$ sei.

4.2 Satz
Sei $\mathbb{S}$ Körper und $\alpha \in S^{P\times P}$. Dann ist α trigonalisierbar *genau dann, wenn das* charakteristische Polynom χ_α *in Linearfaktoren zerfällt.* □

Ist $\mathbb{S} = \mathbb{C}$, dann hat jedes Polynom Nullstelle, zerfällt also in Linearfaktoren. Insbesondere zerfällt χ_α in Linearfaktoren.

4.3 Korollar
Jede Matrix aus $\mathbb{C}^{P\times P}$ ist trigonalisierbar. □

4.1 Aktionsnetzwerke und Faltungsalgebren

Was sind Polynome, was sind Matrizen?

Polynome Typische Antwort: Ein Polynom ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in sich der Form

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sie eignen sich zur Interpolation von $n+1$ „Stützstellen".

Mathematisch unbefriedigend: hier wird nur eingesetzt, die eigentliche Information ist $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, bzw. $\alpha := (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{(N)}$ (das heißt $\operatorname{supp} \alpha := \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$ ist endlich, „reelle Folge mit endlichem Support"). Also ist

$$\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \delta_i^{\mathbb{N}} := \sum_{i \in \operatorname{supp} \alpha} \alpha_i \delta_i^{\mathbb{N}}$$

(interpretierbar als „Polynom", $\alpha \in \mathbb{R}^N$ interpretierbar als formale Potenzreihe).

Für $\alpha \in \mathbb{R}^{(N)}$ ist $\alpha = \alpha * \delta^{\mathbb{N}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha i \cdot \delta_i^{\mathbb{N}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \delta_i^{\mathbb{N}}$ für $a_i := \alpha i$. Setze $X^i := \delta_i^{\mathbb{N}}$, dann ist $\alpha \in \mathbb{R}^{(N)}$ gerade $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i$, dabei ist $a_i X^i$ das i-te *Monom* zu α. Es heißt $a_n X^n$ *Leitmonom* von α und a_n *Leitkoeffizient* von α, falls $n := \max(\operatorname{supp} \alpha)$.

Einsetzen: Wähle $s \in \mathbb{R}$ fix und ersetze X^i durch s^i, das heißt $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto s^i$. Ergebnis: $\alpha s := \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i s^i = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ (dabei ist αs "abuse of notation").

Eventuell klappt das auch für $\alpha \in \mathbb{R}^N$, also ist $\alpha s := \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i s^i$ wohldefiniert (zum Beispiel falls α konvergente Reihe).

Multiplikation von Polynomen ist noch zu klären: Setze $\delta_i^{\mathbb{N}} * \delta_j^{\mathbb{N}} := \delta_{i +_{\mathbb{N}} j}^{\mathbb{N}}$, das heißt $X^i X^j := X^i * X^j := X^{i+j}$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ folgt durch Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \alpha * \beta &:= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} (a_i \delta_i^{\mathbb{N}}) * (b_j \delta_j^{\mathbb{N}}) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times N} a_i b_j \cdot \delta_i^{\mathbb{N}} * \delta_j^{N} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j \cdot \delta_{i+j}^{\mathbb{N}} \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ i+j=h}} a_i b_j \Big) \cdot \delta_h^{\mathbb{N}} = \sum_{h \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{i+j=h} a_i b_j \Big) \cdot \delta_h^{\mathbb{N}} \quad \text{(lax)}, \end{aligned}$$

also $\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \right) * \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j X^j \right) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=h} a_i b_j \right) X^h$.

Matrizen Was ist eine Matrix? Typische Antwort:

Ein Schema (kein mathematisches Objekt im Sinne einer mengenbasierten Modellierung), mit dem ich eine lineare Abbildung beschreiben kann (wenn ich Basen gegeben habe). Das sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

(reelles Schema, reelle Matrix).

Ist also algebraisch modelliert eine Abbildung $\alpha : [m] \times [n] \to \mathbb{R}$, das heißt $\alpha \in \mathbb{R}^{[m]\times[n]}$. Dabei $[m] \times [n]$ syntaktisches Schema von α, sowie $(i, j) \in [m] \times [n]$ „Position" im syntaktischen Schema.

Verallgemeinerte Sicht jetzt möglich: Wähle P und Q beliebige Mengen an Stelle von $[m]$ und $[n]$, dann $\alpha : P \times Q \to \mathbb{R}$ reelle Matrix, wobei (P, Q) Paar von Indexmengen, „formales (syntaktisches) Schema von α" und $P \times Q$ realisiertes (syntaktisches) Schema. (Beachte: Falls $P = \varnothing \neq Q$, dann ist $P \times Q = \varnothing$, also ist Q nicht aus $P \times Q$ rekonstruierbar, wohl aber aus (P, Q); setze $P \boldsymbol{\times} Q := (P, Q)$.)

Matrix-Multiplikation: Zu $\alpha \in \mathbb{R}^{P\times T}$ und $\beta \in \mathbb{R}^{T\times Q}$ ist $\alpha * \beta \in \mathbb{R}^{P\times Q}$ definiert als

$$(\alpha * \beta)(p, q) := \sum_{t\in T} \alpha(p, t) \cdot \beta(t, q).$$

Speziell sei $\delta^{P\times T} : P \times T \to \mathbb{R}^{P\times T}$, $(p, t) \mapsto \delta^{P\times T}_{(p,t)}$, wobei

$$\delta^{P\times T}_{(p,t)} : P \times T \to \mathbb{R}, \quad (p', t') \mapsto \begin{cases} 1 & (p', t') = (p, t), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Elementarmatrix zu (p, t). Dann gilt

$$\begin{aligned} \big(\delta^{P\times T}_{(p',t')} * \delta^{T\times Q}_{(t'',q'')}\big)(p, q) &= \sum_{t\in T} \delta^{P\times T}_{(p',t')}(p, t) \cdot \delta^{T\times Q}_{(t'',q'')}(t, q) \\ &= \begin{cases} 1 & p = p' \wedge t' = t'' \wedge q = q'', \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

das heißt

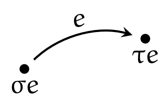
$$\delta^{P\times T}_{(p',t')} * \delta^{T\times Q}_{(t'',q'')} = \begin{cases} \delta^{P\times Q}_{(p',q'')} & \text{für } t' = t'', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ergebnis:

$$\delta^{P\times T}_{(p,t)} * \delta^{T\times Q}_{(t,q)} = \delta^{P\times Q}_{(p,q)}.$$

Speziell für $P = T = Q$ ist $\delta^{P\times P}_{(p,t)} * \delta^{P\times P}_{(t,q)} = \delta^{P\times P}_{(p,q)} = \delta^{P\times P}_{(p,t)*(t,q)}$, mit $(p, t) * (t, q) = (p, q)$ dem Weglassprodukt im logistischen Netzwerk $\mathcal{N}(P, P \times P)$.

Aktionsnetzwerke Zur Erinnerung, ein Netzwerk (gerichteter Multigraph) ist ein Tripel $G = (V, E, \rho)$, wobei V, E Mengen und $\rho : E \to V \times V$ Abbildung sind, setze $\rho e =: (\sigma e, \tau e)$ für alle $e \in E$, also sind $\sigma, \tau \in V^E$.



Es bezeichne $E^{\langle n\rangle} := \big\{(e_1, \ldots, e_n) \in E^N \mid \tau e_i = \sigma e_{i+1} \text{ für alle } i \in [n-1]\big\}$ die Pfade der Länge n in G.

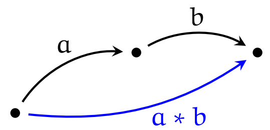
4.4 Definition

$\mathbb{G} := (G, *, \mathrm{id})$ heißt *Aktionsnetzwerk*, kurz ANW, falls $G = (V, E, \rho)$ Netzwerk ist, sowie

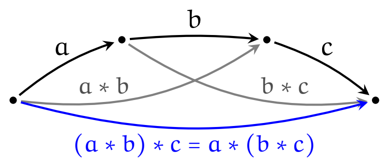
$$*: E^{\langle 2\rangle} \to E, \quad (a, b) \mapsto a * b$$

und $\mathrm{id}: V \to E$ Abbildungen sind derart, dass gilt:

1. $\rho(a * b) = (\sigma a, \tau b) = \rho a * \rho b$ für alle $(a, b) \in E^{\langle 2\rangle}$, wobei $\rho a * \rho b$ Weglassprodukt im logistischen Netzwerk:

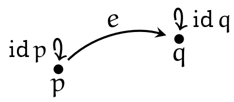


2. $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $(a, b, c) \in \mathbb{E}^{\langle 3\rangle}$ (Assoziativität):



3. $\rho(\mathrm{id}\, p) = (p, p) = \mathrm{id}\, p$ (logistische Sicht) für alle $p \in V$, „passiv in p sein",

4. $\mathrm{id}\, p * e = e = e * \mathrm{id}\, q$ für alle $e \in E$ und $p := \sigma e$, $q := \tau e$ („Passivitätsaxiom"):



□

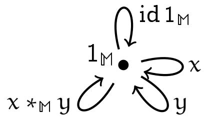
Anmerkung: Die Elemente in E betrachten wir häufig als „Aktionen" und $a * b$ ist die (covariante) Verkettung der Aktion a mit der Aktion b („erst a, dann b") für $(a, b) \in E^{\langle 2\rangle}$. Achtung: Die Verkettung ist nicht für a, b mit $\tau a \neq \sigma b$ definiert.

4.5 Beispiel

1. Sei $\mathcal{V}$ Menge von Mengen, $\mathcal{E}$ Menge von Abbildungen f mit $\mathrm{dom}\, f$, $\mathrm{codom}\, f \in \mathcal{V}$ und $*$ covariante Verknüpfung von Abbildungen; für $P \in \mathcal{V}$ ist $\mathrm{id}_P : P \to P$, $x \mapsto x$, $\mathrm{id}\, P := \mathrm{id}_P$. Bedingungen:
   a) $\{\mathrm{id}_P \mid P \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{E}$,
   b) $P, T, Q \in \mathcal{E}$, $P \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} Q$ Abbildungen mit $f, g \in \mathcal{E}$, so auch $f * g \in \mathcal{E}$.

2. *Logistisches ANW* zur Menge P:
   $\mathbb{G}_P := (G_P, *, \mathrm{id})$ mit $G_P := (P, P \times P, \mathrm{id}_{P\times P})$ logistisches Netzwerk zu P, und $(p, t) * (t, q) := (p, q)$ für alle $p, t, q \in P$ Weglassprodukt, (syntaktische) Verkettung syntaktischer Vektoren (p, t) mit (t, q), sowie $\mathrm{id}: P \to P \times P$, $p \mapsto (p, p)$.
   Jede transitive, reflexive Relation R auf der Menge P (das heißt (P, R) ist Präordnung) liefert ein ANW $\mathbb{G}(P, R)$ als Unterstruktur von $\mathbb{G}_P$.

3. *Monoide als ANWe*, „Schreibtischtäter ANW“:
   Ist $\mathbb{M} = (M, *_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}})$ Monoid, so sei $\mathbb{GM} := (\mathrm{GM}, *_{\mathbb{M}}, \mathrm{id})$ mit $\mathrm{GM} := (\{1_{\mathbb{M}}\}, M, \rho)$, wo $\rho : M \to \{1_{\mathbb{M}}\}^2$, $x \mapsto (1_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}})$, und $\mathrm{id} : \{1_{\mathbb{M}}\} \to M$, $1_{\mathbb{M}} \mapsto 1_{\mathbb{M}}$, das zu $\mathbb{M}$ gehörige ANW, „M als einknotiges ANW“.



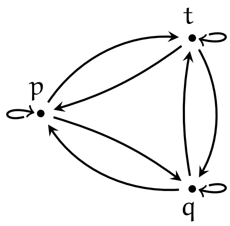
   Umgekehrt induziert jedes einknotige ANW (das heißt $\#V = 1$) ein Monoid. □

Anmerkung: ANWe heißen auch kleine covariante Kategorien.

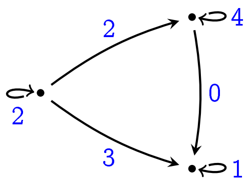
Faltungsalgebren Sei $\mathbb{S}$ Semiring und $\mathbb{G} = (G = (V, E, \rho), *, \mathrm{id})$ ANW, dann betrachte $S^{(E)} := \{u \in S^E \mid \operatorname{supp} u \text{ endlich}\}$, die Menge der endlichen Multimengen zu E über $\mathbb{S}$, das heißt Menge der Kantenbewertungen von G mit endlichem Support.

4.6 Beispiel

Sei $P = \{p, q, t\}$ und betrachte das logistische ANW $\mathbb{G}_P = (\mathcal{N}(P, P \times P), *, \mathrm{id})$, wobei $\mathcal{N}(P, P \times P)$ das logistische Netzwerk sei:



Sei $R := \{(p,t), (t,q), (p,q), (p,p), (t,t), (q,q)\} \subseteq P \times P$ transitive reflexive Relation auf P, liefert ein ANW $\mathbb{G}(P, R)$ als Unterstruktur von $\mathbb{G}_P$. Beispiel für $u \in S^E = \mathbb{N}^R$ (also $\mathbb{S} = \mathbb{N}$, $E = R$) ist dann:



□

4.7 Definition (Faltungsalgebra)

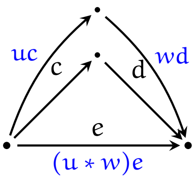
Sei $\mathbb{S}$ Semiring und $\mathbb{G}$ endlichknotiges ANW (das heißt V ist endlich). Dann sei

$$\mathbb{S}[\mathbb{G}] := (S^{(E)}, +, *, 0, I)$$

mit $+$ und $*$ zweistellige Operationen auf $S^{(E)}$, so dass $(u + w)e := ue + we$ für alle $u, w \in S^{(E)}$ und

$$(u * w)e := \sum_{\substack{(c,d) \in E^{(2)} \\ c * d = e}} uc \cdot wd$$

für alle $e \in E$ und $u, w \in S^{(E)}$ (die *Faltung*, "convolution" von u mit w, $\operatorname{Split}(e) := \{(c,d) \in E^{\langle 2 \rangle} \mid c * d = e\}$ der *Split* von e),



sowie $0 : E \to S$, $e \mapsto 0$, und

$$I : E \to S, \quad e \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } e \in \operatorname{id} V, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

es heißt $\mathbb{S}[\mathbb{G}]$ die *Faltungsalgebra* von $\mathbb{G}$ über $\mathbb{S}$. □

Also lax: $(u * w)e = \sum_{c*d=e} uc \cdot wd$.

Wichtig sind $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ und $\mathbb{R}_{\text{arc}}$ in der Optimierung, zum Beispiel für $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{\text{trop}}$ ist $(u*w)e = \min_{(c,d)\in\operatorname{Split}(e)}(uc + wd)$.

Ist $\mathbb{S}[\mathbb{G}]$ Faltungsalgebra, dann ist

$$(\delta_a^E * \delta_b^E)e = \sum_{(c,d)\in\operatorname{Split}(e)} \delta_a^E c \cdot \delta_b^E d = \begin{cases} 1 & \text{für } (a,b) \in \operatorname{Split}(e), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn der Fall $a = c \wedge b = d$ tritt auf, falls $(a,b) \in \operatorname{Split}(e)$. Das heißt

$$\delta_a^E * \delta_b^E = \delta_{a*b}^E \quad \text{für alle } (a,b) \in E^{\langle 2 \rangle},$$

sowie $\delta_a^E * \delta_b^E = 0$, falls $(a,b) \in E^2$ mit $\tau a \neq \sigma b$.

Für $u, v \in S^{(E)}$ ist dann

$$u * w = \sum_{(c,d)\in E^2} uc \cdot wd \cdot (\delta_c^E * \delta_d^E),$$

wegen $u = \sum_{c\in E} uc \cdot \delta_c^E$, $w = \sum_{d\in E} wd \cdot \delta_d^E$ und der Distributivität von $*$ bezüglich $+$.

4.8 Satz

Es ist $\mathbb{S}[\mathbb{G}]$ ein Semiring für jedes echt knotenendliche ANW $\mathbb{G}$ (das heißt V endlich und $V \neq \varnothing$) und jeden Semiring $\mathbb{S}$. □

Zum Beispiel Assoziativität: Sei $(a,b,c) \in E^{\langle 3 \rangle}$, dann $(\delta_a^E * \delta_b^E) * \delta_c^E = \delta_{a*b}^E * \delta_c^E = \delta_{(a*b)*c}^E = \delta_{a*(b*c)}^E = \delta_a^E * \delta_{b*c}^E = \delta_a^E * (\delta_b^E * \delta_c^E)$; gilt auch allgemein (Übung).

Zum Beispiel $(u * I)e = \sum_{(c,d)\in\operatorname{Split}(e)} uc \cdot I(d) = ue$, denn $I(d) = 1$ falls $d = \operatorname{id} q$, das heißt $q = \tau e$, und $c = c * \operatorname{id} q = c * d = e$; also $u * I = u$.

4.9 Beispiel

1. Sei P endliche nichtleere Menge. Für jeden Semiring $\mathbb{S}$ gilt

$$\mathbb{S}[\mathbb{G}_P] = \operatorname{Mat}_P \mathbb{S}.$$

Begründung: Sei $u, w \in S^{P\times P}$, hier $E = P\times P$ Kantenmenge. Ist $e = (p,q) \in P\times P$, dann ist $\mathrm{Split}(e) = \{((p,t),(t,q)) \mid t \in P\}$, also ist $(u * w)(p,q) = \sum_{t\in P} u(p,t)\cdot w(t,q)$ Matrizenprodukt, und $I(p,q) = 1$ für $p = q$ ($\mathrm{id}\, p = (p,p)$), $I(p,q) = 0$ sonst, I ist Einheitsmatrix.

2. Sei $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{N},+,0) = \mathbb{G}\mathbb{N}_{\mathrm{add}}$ und $\mathbb{S}$ kommutativer Semiring, also $\mathbb{N} = E$, $\{0\} = V$. Für $u, w \in \mathbb{S}^{(\mathbb{N})}$ ist
$$(u * w)k = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\\ i+j=k}} ui\cdot wj$$
(denn $\mathrm{Split}(k) = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i+j = k\}$), also gilt $u * w = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\sum_{i+j=k} ui\cdot wj\big)X^k$ für $X^k := \delta^{\mathbb{N}}_k$. Ergebnis: $\mathbb{S}[\mathbb{G}] = \mathbb{S}[X]$ Polynomsemiring in X.

3. Sei $\mathbb{M} = (M, *_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}})$ Monoid, $\mathbb{S}$ kommutativer Semiring,
$$(u * w)x = \sum_{\substack{(y,z)\in M\times M\\ x=y*_{\mathbb{M}}z}} uy\cdot wz.$$
Dann ist $\mathbb{S}[\mathbb{M}] := \mathbb{S}[\mathbb{G}\mathbb{M}]$ der sogenannte *Monoidsemiring* zu $\mathbb{M}$ über $\mathbb{S}$.

Speziell für $\mathbb{M} = \mathbb{N}^{(P)}_{\mathrm{add}}$ setze $X_p := \delta^M_p$, dann $\mathbb{S}[\mathbb{M}] =: \mathbb{S}[(X_p)_{p\in P}]$ Polynomsemiring in $(X_p)_{p\in P}$, „multivariate Polynome“ sind Elemente $u \in S^{(M)}$.

Berühmter Fall: $\mathbb{S} = \mathbb{C}$, $\mathbb{M}$ bilde Gruppe, dann $\mathbb{C}[\mathbb{M}]$ komplexer Gruppenring zu $\mathbb{M}$. □

Einsetzungsmorphismus Anwendung: „Einsetzen in Polynome“.

Eine *Algebra* $\mathbb{A}$ über einem kommutativen Semiring $\mathbb{S}$ (auch $\mathbb{S}$-Algebra) ist ein $\mathbb{S}$-Modul mit Multiplikation, so dass $(A,+,\cdot,0,1)$ Semiring ist, sowie $s\cdot(a\cdot_{\mathbb{A}} b) = (s\cdot a)\cdot_{\mathbb{A}} b = a\cdot_{\mathbb{A}}(s\cdot b)$ für alle $s \in S$ und $a, b \in A$. Insbesondere ist $\mathbb{S}[\mathbb{G}]$ Algebra über $\mathbb{S}$ für jedes echt endlichknotiges ANW $\mathbb{G}$.

4.10 Satz (Einsetzungsmorphismen)
Sei $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{A}_{\mathrm{mult}}$ Monoidmorphismus, wobei $\mathbb{A}$ Algebra über kommutativen Semiring $\mathbb{S}$ sei. Dann existiert genau ein Algebramorphismus $\psi : \mathbb{S}[\mathbb{M}] \to \mathbb{A}$ (das heißt ψ ist $\mathbb{S}$-linear und ein Semiringmorphismus) mit $\psi\circ\delta^M = \varphi$, das heißt:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta^M"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathbb{A}_{\mathrm{mult}} \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
\mathbb{S}[\mathbb{M}] \arrow[r, "\exists!\,\psi"'] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$
□

Es sei ψ der *Einsetzungsmorphismus* für φ, “evalution morphism”; also ψ regelt das Einsetzen von φ in jedes $u \in S^{(M)}$. Explizit ist
$$\psi : S^{(M)} \to A, \quad u \mapsto u * \varphi \quad \text{mit} \quad u * \varphi := \sum_{x\in M} ux\cdot\varphi x \in A.$$
Wir schreiben $u(\varphi) := u * \varphi = \sum_{x\in M} ux\cdot\varphi x$, „$u(\varphi)$ ist die Einsetzung von φ in $u \in S^{(M)}$“.

Beispiel: Sei φ ein *Charakter* von $(\mathbb{Z}_{12})_{\mathrm{add}}$, das heißt $\varphi : (\mathbb{Z}_{12})_{\mathrm{add}} = (\underline{12}, +, 0) \to \mathbb{C}^{\times}_{\mathrm{mult}} = (\mathbb{C}^{\times}, \cdot, 1)$ ist Gruppenmorphismus; induziert Monoidmorphismus, da $\varphi x = \varphi(0 + x) = \varphi 0 \cdot \varphi x$, also $\varphi 0 = 1$. Zum Beispiel $a \mapsto e^{a(2\pi/12)i}$, also $0 \mapsto 1$ und $1 \mapsto e^{(2\pi/12)i}$ (30°).

Beweis

Zeige $\psi(u * w) = \psi u \cdot_{\mathbb{A}} \psi w$ für alle $u, w \in S^{(E)}$ (Rest: Übung). Begründung: Wegen $(u * w)x = \sum_{(y,z): y *_{\mathbb{M}} z = x} uy \cdot wz$ und $\varphi(y *_{\mathbb{M}} z) = \varphi y \cdot_{\mathbb{A}} \varphi z$ ist

$$\begin{aligned}
\psi(u * w) = (u * w) * \varphi &= \sum_{x \in M} (u * w)x \cdot \varphi x \\
&= \sum_{x \in M} \sum_{\substack{(y,z) \in M \times M \\ y *_{\mathbb{M}} z = x}} (uy \cdot wz) \cdot \varphi(y *_{\mathbb{M}} z) \\
&= \sum_{(y,z) \in M \times M} (uy \cdot wz) \cdot (\varphi y \cdot_{\mathbb{A}} \varphi z) \\
&= \sum_{(y,z) \in M \times M} (uy \cdot \varphi y) \cdot_{\mathbb{A}} (wz \cdot \varphi z) \\
&= \Big(\sum_{y \in M} uy \cdot \varphi y \Big) \cdot_{\mathbb{A}} \Big(\sum_{z \in M} wz \cdot \varphi z \Big) \\
&= (u * \varphi) \cdot_{\mathbb{A}} (w * \varphi) = \psi u \cdot_{\mathbb{A}} \psi w,
\end{aligned}$$

das heißt $\psi(u * w) = \psi u \cdot_{\mathbb{A}} \psi w$. ∎

Es ist $\psi(\delta_i^M) = \varphi i$ für alle $i \in M$, also $u = \sum_{i \in M} ui\, \delta_i^M \overset{\psi}{\mapsto} u(\varphi) := \sum_{i \in M} ui \cdot \varphi i$ für jedes $u \in S^{(M)}$, „Einsetzen von φ“. Setzt man $X^i := \delta_i^M$ und $\varphi^i := \varphi i$ für alle $i \in M$ (mit Vorsicht zu genießen), so gilt

$$\sum_{i \in M} u_i X^i \overset{\psi}{\mapsto} \sum_{i \in M} u_i \varphi^i.$$

Wichtige Anwendung: Sei $\mathbb{M} = \mathbb{N}_{\mathrm{add}} = (\mathbb{N}, +, 0)$. Wähle $a \in A$ fix. Dann ist

$$[a] : \mathbb{N} \to A, \quad i \mapsto a^i$$

Monoidmorphismus von $\mathbb{N}_{\mathrm{add}}$ nach $\mathbb{A}_{\mathrm{mult}}$. Die Einsetzung von a in $u \in S[X] = \mathbb{S}[\mathbb{N}_{\mathrm{add}}]$ ist dann gerade $u(a) = \sum u_i a^i$, das heißt $u(a) \cdot_{\mathbb{A}} w(a) = (u * w)a$ für $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i X^i$, $w = \sum_{i \in \mathbb{N}} w_i X^i$ in $\mathbb{S}[X]$.

Es ist $u_{\mathbb{A}} : A \to A$, $a \mapsto u(a)$ die *Polynomfunktion* zum Polynom $u \in \mathbb{S}[X]$. Im Fall $\mathbb{A} = \mathbb{S}$ ist also $u_{\mathbb{S}} : S \to S$, $s \mapsto u(s) = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i s^i$ die Polynomfunktion zum Polynom $u \in \mathbb{S}[X]$.

Produkt von Aktionsnetzwerken

4.11 Definition

Seien $\mathbb{G}, \mathbb{G}'$ ANWe. Dann sei

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G}' := (G \times G', *, \mathrm{id})$$

definiert via $G \times G' := (V \times V', E \times E', \rho)$ mit $\rho(e, e') := ((\sigma e, \sigma' e'), (\tau e, \tau' e'))$ und $(a, a') * (b, b') := (a * b, a' * b')$ für $((a, a'), (b, b')) \in (E \times E')^{\langle 2 \rangle}$.

Es ist $G \times G'$ ebenfalls ANW, das sogenannte *Produkt* von G mit G'. □

4.12 Satz
Sei $\mathbb{S}$ Semiring, seien $\mathbb{G}, \mathbb{G}'$ echt knotenendliche ANWe. Dann gilt:

1. $(\mathbb{S}[\mathbb{G}])[\mathbb{G}'] \cong \mathbb{S}[\mathbb{G} \times \mathbb{G}']$,
2. $\mathbb{S}[\mathbb{G} \times \mathbb{G}'] \cong \mathbb{S}[\mathbb{G}' \times \mathbb{G}]$. □

Beweisidee: Sei $\mathbb{S}' := \mathbb{S}[\mathbb{G}]$. Für $u' \in \mathbb{S}'^{(E')}$ (das heißt $u' \in (\mathbb{S}[\mathbb{G}])[\mathbb{G}']$) ist dann $u'e' = \sum_{e \in E}(u'e')e \cdot \delta_e^E$. Setze $\tilde{u}(e, e') := (u'e')e$ für alle $(e, e') \in E \times E'$, also $\tilde{u} := m^T u' \in S^{E \times E'}$. Dann ist $u' \mapsto \tilde{u}$ Isomorphismus von $(\mathbb{S}[\mathbb{G}])[\mathbb{G}']$ nach $\mathbb{S}[\mathbb{G} \times \mathbb{G}']$.

Anwendung: $\mathbb{G} := \mathbb{G}\mathbb{N}_{\mathrm{add}}$, $\mathbb{G}' := \mathbb{G}_N$, $\mathbb{S}$ kommutativer Semiring, $N \neq \emptyset$ endlich. Dann

$$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{S}[X]) \cong (\mathrm{Mat}_N \mathbb{S})[X]$$

(Matrizen von Polynomen vs Polynome von Matrizen).

4.2 Eigenwerte, Eigenvektoren

Sei $\mathcal{M}$ Modul über einem kommutativen Ring $\mathbb{S}$ und sei $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathcal{M}$. Für $v \in M$ und $s \in S$ ist v „Eigenvektor zum Eigenwert s bezüglich φ“, falls $\varphi v = s \cdot v$ gilt.

4.13 Definition
Es ist $s \in S$ *Eigenwert* von φ, falls ein $v \in M \setminus \{\bar{0}\}$ mit $\varphi v = s \cdot v$ existiert; ferner bezeichne $\mathrm{EigValue}(\varphi)$ die Menge der Eigenwerte von φ. Es ist $v \in M$ *Eigenvektor* von φ, falls $v \neq \bar{0}$ ist und ein $s \in S$ mit $\varphi v = s \cdot v$ existiert. Für $s \in S$ sei

$$\mathrm{Eig}(\varphi, s) := \{v \in M \mid \varphi v = s \cdot v\} ,$$

und ist s Eigenwert von φ, so heißt $\mathrm{Eig}(\varphi, s)$ *Eigenraum* von φ zu s. Gilt $\sum_{s \in S} \mathrm{Eig}(\varphi, s) = M$, so hat φ eine *Eigenraumzerlegung* $(\mathrm{Eig}(\varphi, s) \mid s \in \mathrm{EigValue}(\varphi))$. □

Es ist $U \in L\mathcal{M}$ ein φ-*invarianter* Unterraum, falls $\varphi U \subseteq U$ gilt.

4.14 Bemerkung
Für $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathcal{M}$ gilt:

- $\mathrm{Eig}(\varphi, s) = \mathrm{Ker}(s \cdot \mathrm{id}_M - \varphi)$ für alle $s \in S$.
- $\mathrm{Eig}(\varphi, r) \cap \mathrm{Eig}(\varphi, s) = \{\bar{0}\}$ für $r, s \in S$ mit $r \neq s$, falls $\mathbb{S}$ Körper ist.
- $\mathrm{Eig}(\varphi, s)$ ist φ-invariant für alle $s \in S$.
- Existiert eine Basis $\eta : P \to M$ von $\mathcal{M}$ bestehend aus Eigenvektoren von φ (das heißt ηp ist Eigenvektor von φ für jedes $p \in P$), so ist φ diagonalisierbar. In diesem Fall hat φ eine Eigenraumzerlegung. □

4.15 Definition
Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring, $N \neq \emptyset$ endlich und $\alpha \in S^{N \times N}$. Dann heißt

$$\chi_\alpha := \det(X \cdot I_N - \alpha) \in \mathbb{S}[X]$$

das *charakteristische Polynom* von α. □

4.16 Proposition

Für das charakteristische Polynom von $\alpha \in S^{N \times N}$ gilt

$$\chi_\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \Big(\sum_{J \in \binom{N}{k}} \det \alpha_J \Big) \cdot X^{n-k},$$

wobei $n := \#N$, $\binom{N}{k} := \{J \in 2^N \mid \#J = k\}$ und $\alpha_J := \alpha | J \times J$. □

Zum Beispiel für $n = 2$ und $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erhalten wir $\chi_\alpha = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.

Beweis

Zunächst „Determinante einer Summe“. Für $\alpha, \beta \in S^{N \times N}$ gilt nach der Leibniz-Formel

$$\det(\alpha + \beta) = \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym} N} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \lambda\sigma \qquad \text{für } \lambda\sigma := \prod_{i \in N} \big(\alpha(i, \sigma i) + \beta(i, \sigma i) \big).$$

Dabei ist $\lambda\sigma = \sum_{J \in 2^N} \lambda(\sigma, J)$ für $\lambda(\sigma, J) := \prod_{i \in J} \alpha(i, \sigma i) \cdot \prod_{i \in N \smallsetminus J} \beta(i, \sigma i)$, und es folgt

$$\det(\alpha + \beta) = \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym} N} \sum_{J \in 2^N} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \lambda(\sigma, J) = \sum_{J \in 2^N} \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym} N} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \lambda(\sigma, J).$$

Speziell für $\beta = X \cdot I_N \in (\mathbb{S}[X])^{N \times N}$ und $\sigma \in \operatorname{Sym} N$, $J \in 2^N$ ergibt sich

$$\prod_{i \in N \smallsetminus J} \beta(i, \sigma i) = \begin{cases} X^{\#(N \smallsetminus J)} & \text{falls } N \smallsetminus J \subseteq \{i \in N \mid \sigma i = i\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist

$$\lambda(\sigma, J) = \begin{cases} \prod_{i \in J} \alpha(i, \sigma i) \cdot X^{\#(N \smallsetminus J)} & \text{falls } N \smallsetminus J \subseteq \{i \in N \mid \sigma i = i\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

woraus folgt

$$\sum_{\sigma \in \operatorname{Sym} N} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \lambda(G, J) = (\det \alpha_J) \cdot X^{\#(N \smallsetminus J)}.$$

Also gilt

$$\det(\alpha + X \cdot I_N) = \sum_{J \in 2^N} (\det \alpha_J) \cdot X^{n - \#J} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{J \in \binom{N}{k}} \det \alpha_J \Big) \cdot X^{n-k},$$

woraus mit $\chi_\alpha = \det(X \cdot I_N - \alpha)$ leicht die Behauptung folgt. ■

4.17 Bemerkung

Seien $\mathbb{S}, N, \alpha$ wie oben.

1. Ist $\alpha' \in S^{N \times N}$ ähnlich zu α, so ist $\chi_{\alpha'} = \chi_\alpha$.
2. Ist $\mathbb{S}$ Körper, so ist $\lambda \in S$ Nullstelle von χ_α genau dann, wenn λ Eigenwert von α. □

4.18 Definition
Sei $\mathbb{S}$ Körper, $N \neq \varnothing$ endlich und $\alpha \in S^{N\times N}$. Ist λ Eigenwert von α, so ist

- Dimension von $\mathrm{Eig}(\alpha,\lambda) := \{v \in S^N \mid v * \alpha = \lambda \cdot v\}$ die *geometrische Vielfachheit*,
- größtes $k \in \mathbb{N}_+$ mit $\chi_\alpha = (X-\lambda)^k \cdot f$ für ein $f \in \mathbb{S}[X]$ die *algebraische Vielfachheit*

von λ bezüglich α. □

4.19 Bemerkung
Es ist (bezüglich α) die geometrische Vielfachheit von λ immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ. □

4.3 Caley-Hamilton, Jordan-Normalform

4.20 Satz (Cayley-Hamilton)
Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring, $N \neq \varnothing$ endlich. Dann gilt für $\alpha \in S^{N\times N}$ stets

$$\chi_\alpha(\alpha) = 0,$$

wobei $\chi_\alpha := \det(X \cdot I_N - \alpha) \in \mathbb{S}[X]$ *und* $X \cdot I_N - \alpha \in \mathrm{Mat}_N\,\mathbb{S}[X] \equiv (\mathrm{Mat}_N\,\mathbb{S})[X]$. □

Zum Beweis:

4.21 Lemma
Sei $\alpha \in \mathrm{Mat}_N\,\mathbb{S}$ *und* $u \in \mathbb{S}[X]$. *Dann folgt aus* $(X\cdot I_N - \alpha) * \gamma = u \cdot I_N$ *für ein* $\gamma \in \mathrm{Mat}_N\,\mathbb{S}[X]$ *bereits* $u(\alpha) = 0$. □

Anwendung: Sei $\gamma := (X\cdot I_N - \alpha)^{\#}$ die Adjunkte zu $X\cdot I_N - \alpha$ und $u := \det(X\cdot I_N - \alpha) = \chi_\alpha$. Also ist $(X \cdot I_N - \alpha) * (X \cdot I_N - \alpha)^{\#} = \chi_\alpha \cdot I_N$, und somit ist $\chi_\alpha(\alpha) = 0$.

Zu zeigen bleibt das Lemma.

Beweis (Lemma)
Links: $(X \cdot I_N - \alpha) * \gamma = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\gamma_k X^{k+1} - \alpha * \gamma_k X^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_{k-1} X^k - \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha * \gamma_k X^k$, da $\gamma = \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k X^k$ und $\gamma_{-1} := 0$.

Rechts: $u \cdot I_N = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k X^k \cdot I_N = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k I_N \cdot X^k$.

Koeffizientenvergleich ergibt: $\gamma_{k-1} - \alpha * \gamma_k = u_k I_N$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Es folgt $\alpha^k * \gamma_{k-1} - \alpha^{k+1} * \gamma_k = u_k \alpha^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Summiere, also $0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} a^k * \gamma_{k-1} - \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha^{k+1} * \gamma_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \alpha^k = u(\alpha)$. ■

Anwendungen „Charakteristisches Polynom“.

4.22 Satz
Sei $\mathbb{S}$ Körper, $N \neq \varnothing$ endlich, $\alpha \in \mathrm{Mat}_N\,\mathbb{S}$. Dann gilt: α ist trigonalisierbar (ähnlich zu einer Trigonalmatrix) genau dann, wenn χ_α in Linearfaktoren zerfällt, das heißt $\chi_\alpha = \prod_{i\in N}(X - \lambda i)$ *für ein* $\lambda \in S^N$. □

Beweis
„$\Rightarrow$“: Sei α ähnlich zu α' mit α' Trigonalmatrix. Dann ist $\chi_\alpha = \chi_{\alpha'} = \det(X \cdot I_N - \alpha') = \prod_{i\in\mathbb{N}}(X - \alpha'(i,i))$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\chi_\alpha = \prod_{i\in N}(X - \lambda_i)$, sei $j \in N$ fest, $\chi_\alpha(\lambda_j) = 0$. Dann gibt es $v_j \in S^N \setminus \{\bar{0}\}$ mit $f_\alpha(v_j) = v_j * \alpha = \lambda_j v_j$, das heißt v_j ist Eigenvektor. Spalte auf in $Sv_j \oplus U = S^N$ mit $f_\alpha(U) \subseteq U$. Induktion nach $\#N$.

(Erster Beweisversuch, so klappt's nicht! Gegenbeispiel $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$) ∎

4.23 Korollar

Jede Matrix in $\mathrm{Mat}_N \mathbb{C}$ *ist trigonalisierbar (da* $\mathbb{C}$ *algebraisch abgeschlossen, das heißt jedes Polynom zerfällt in Linearfaktoren).* □

Jordansche Normalform Sei $N = [n]$, $n \in \mathbb{N}_+$, $\mathbb{S}$ Körper. Zu $1 \le m \le n$ und $\lambda \in S$ sei

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \lambda & 0 \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in S^{[m]\times[m]}$$

(„einfache Gestalt“) die *Jordanmatrix* (evtl. transponieren, wenn kontravariante Sicht).

4.24 Satz

Zerfällt χ_α *für* $\alpha \in \mathrm{Mat}_N \mathbb{S}$ *in Linearfaktoren, dann existiert eine zu* α *ähnliche Matrix* α' *(das heißt* $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$ *mit* β *invertierbar) der Form*

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_k, m_k) \end{pmatrix},$$

wobei $m_1 + \dots + m_k = n$ *und* $\lambda_i \in S$, *„fast Diagonalgestalt“.* □

Liften: „orthogonal in $\mathbb{C}$“ heißt *unitär*: Zu $x, y \in \mathbb{C}^N$ sei

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i\in N} x_i \bar{y}_i = x * \bar{y},$$

wo $\bar{y}i := \overline{yi}$; zu $s = s_1 + is_2 \in \mathbb{C}$ sei dabei $\bar{s} = s_1 - is_2$ die konjugiert komplexe Zahl zu s, dann $s \cdot \bar{s} = |s|^2$, denn $(s_1 + is_2)(s - is_2) = s_1^2 - i^2 s_2^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Dann $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$, $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$; $\sqrt{x * \bar{x}} = \|x\|$, $\lambda x * \overline{\lambda x} = \lambda\bar{\lambda} \cdot x * x$, also $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Sei $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x * \bar{y} = 0$ (x unitär orthogonal zu y).

Orthogonale Gruppe wird zur unitären Gruppe: $\alpha * \alpha^T = I_N$, das heißt α *orthogonal*, entspricht $\alpha * \alpha^* = I_N$, das heißt α *unitär*, wobei $\alpha^* = \bar{\alpha}^T$.