TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften**, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Stefan Schmidt

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Teil 1: Teil 2:

Note:

# Klausur zur Vorlesung:

# "Lineare Algebra und Analytische Geometrie"

*Hinweise:*

- Erlaubtes Hilfsmittel ist ein computer- oder handgeschriebenes A4-Blatt.
- In der Klausur gibt es insgesamt 200 Punkte zu erreichen, 100 davon gibt es auf Teil I (Praxis), die anderen 100 auf Teil II (Theorie). Die Prüfung gilt als bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. 100 erreichte Punkte ergeben die Note 1.0. Durch 2 Zusatzaufgaben können zusätzlich 10 Punkte erreicht werden.
- Die Lösungswege sind ohne Lücken anzugeben. Jede Aussage ist zu begründen.

Name, Vorname: Punktzahl Teil 1:

Matrikelnummer: Punktzahl Seite:

---

# Teil I

# Praxis

## Aufgabe 1 (10 Punkte):

Betrachten Sie Teilmengen $A,\ B,\ C$ einer Grundmenge $U$ und setze $X^c := \{u \in U \mid u \notin X\}$ für jede Teilmenge $X$ von $U$. Seien dann folgende Mengen ausgezeichnet:

$M_1 = A^c \cap B^c \cap C^c$

$M_2 = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$

$M_3 = ((A \cap B)^c \cup C)^c$

$M_4 = ((A^c \cup B^c)^c \cup C^c)^c$

$M_5 = (A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) \cup (C \cap A^c)$

Vereinfachen Sie jede der Mengen und schraffieren Sie sie dann im VENN-Diagramm (siehe nächste Seite).

## Aufgabe 2 (10 Punkte):

Für $P := \{Quarter,\ Dollar\}$ und $Q := \{Nickel,\ Dime\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P \times Q}$ tabellarisch gegeben:

| | Nickel | Dime |
|---|---|---|
| Quarter | 1 | 2 |
| Dollar | 4 | 8 |

Seien $\gamma := r_\mu$ die ROW-MAP zu $\mu$ und $f := f_\gamma$ die Linearkombinationsabbildung bezüglich $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Außerdem sei $\beta \in \mathbb{N}^Q$ gegeben durch:

| $y$ | Nickel | Dime |
|---|---|---|
| $\beta y$ | 10 | 20 |

Bestimmen Sie $f$ und finden Sie zur Gleichung $fx = \beta$ die Lösungsmenge $f^{-1}\{\beta\}$.

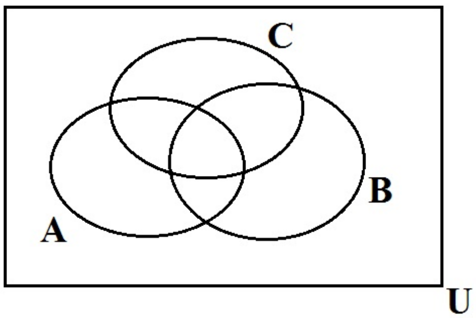
Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

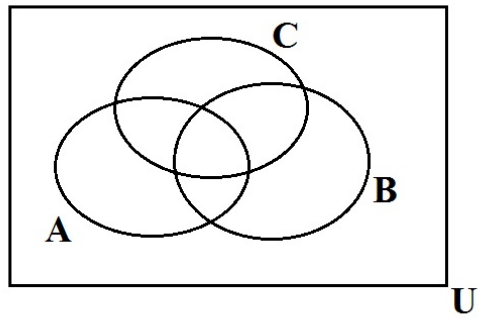
---

**Zu schraffierende VENN-Diagramme (Aufgabe 1):**

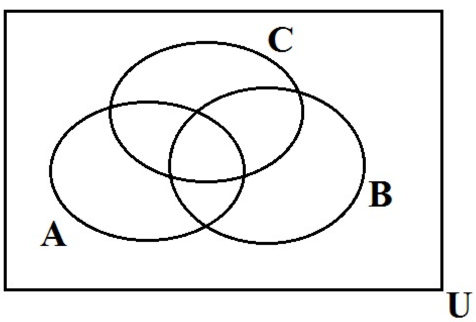
$M_{1:}$



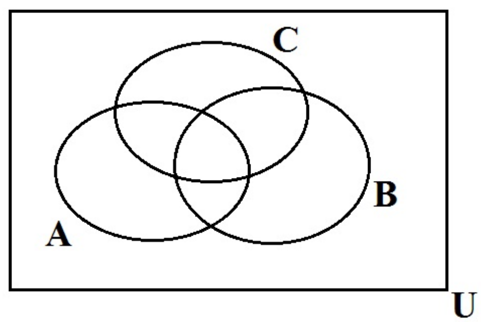

$M_2$ :



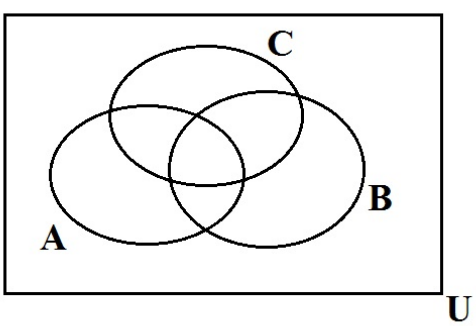

$M_{3:}$




$M_4$ :




$M_5$ :



Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

## Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei $M$ ={Apfel, Birne, Zitrone, Banane} und $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^M$ seien gegeben durch:

| $x$ | Apfel | Birne | Zitrone | Banane |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha x$ | 4 | 2 | 0 | 2 |
| $\beta x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle:

| $x$ | Apfel | Birne | Zitrone | Banane |
|---|---|---|---|---|
| $(\alpha + \beta)x$ | | | | |
| $(\alpha \wedge \beta)x$ | | | | |
| $(\alpha \vee \beta)x$ | | | | |

(b) Geben Sie *supp* $\alpha$ und *supp* $\beta$ an.

## Aufgabe 4 (14 Punkte):

(a) Ausgehend vom Rechenbereich $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ überführen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

und verifizieren Sie :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

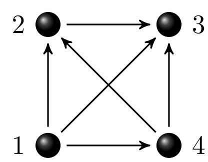
(b)

Wenden Sie (a) an, um folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &+ 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 &+ 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 &+ 2x_3 = 3 \end{aligned}$$

## Aufgabe 5 (8 Punkte):

Betrachte das Netzwerk $\mathcal{NR}$:




Bestimme $\chi_{\mathcal{R}} * \chi_{\mathcal{R}} =: \chi^2_{\mathcal{R}}$ in $Mat_P\mathbb{N}$ für $P = [4]$ und interpretiere das Ergebnis.

## Aufgabe 6 (10 Punkte):

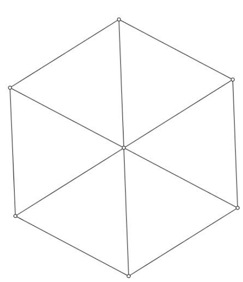
Ein ungerichtetes Netzwerk bzw. ungerichteter Multigraph ist erklärt als Tripel $G = (V, E\, \varrho)$ mit $V$ als Kantenmenge, $E$ als Knotenmenge und $\varrho : E \to \begin{pmatrix} V \\ [2] \end{pmatrix}$ als Strukturabbildung - wobei $\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} := \{P \in 2^V \mid \#P \in I\}$ für $I \subseteq \mathbb{N}$.

G heißt endlich, falls $V$ und $E$ endlich sind.

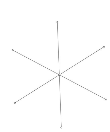
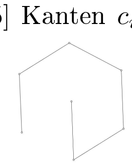
In diesem Fall sei $span:\ 2^E \to 2^E$ diejenige Abbildung, welche jeder Kantenmenge $X \subseteq E$ durch $span\, X$ die Menge aller Kanten $e \in E$ zuordnet, für die gilt:

$e \in X$ oder zu $e$ existiert eine kreisfreie Teilmenge $U$ von $X$ derart, dass $U \cup \{e\}$ einen Kreis enthält.

Sei G gegeben durch :



Finde eine Folge von Basen $T_2, T_3, T_4, T_5$ derart, dass es zu jedem $i \in [5]$ Kanten $c_i \in T_i$ und $e_i \in T_{i+1}$ mit

$(T_i - \{c_i\}) \cup \{e_i\} = T_{i+1}$ gibt, falls $T_1$ durch  und $T_6$ durch  gegeben sind.

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

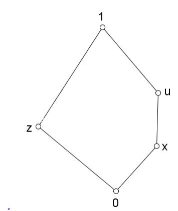
---

### Aufgabe 7 (8 Punkte):

Vergleiche die Anzahl der Elemente von $Mat_3\mathbb{Z}_2$ (d.h. des Ringes der $3 \times 3$ - Matrizen über $\mathbb{Z}_2$) mit derjenigen von $\mathbb{G}L(3, 2)$.

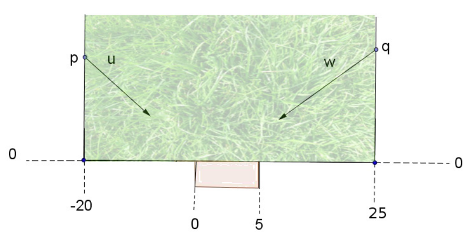
### Aufgabe 8 (8 Punkte):

Zeige, dass folgender Verband (gegeben durch sein Hassediagramm) nicht modular ist:




Vergleiche dann die Terme $(x \vee z) \wedge u$ und $x \vee (z \wedge u)$.

### Aufgabe 9 (12 Punkte):




Zwei Linienrichter stehen etwas ungünstig zur Position $b$ des Fußballs. Der eine von ihnen steht auf Position $p = (-20, 11)$ und sieht den Ball in Richtung $u = (10, -5)$, der andere steht auf Position $q = (25, 13)$ und sieht den Ball in Richtung $w = (-15, -10)$. Der Torraum deckt die Fläche $T = [0, 5] \times [-2, 0]$ ab.

Entscheide: Tor oder kein Tor?

Das heißt: Liegt b in T oder nicht in T?

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

## Aufgabe 10 (12 Punkte):

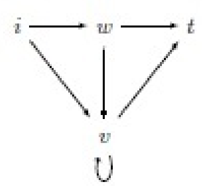
Sei $\mathbb{S}$ ein Semiring. Für eine endliche, nichtleere Menge $P$ heißt $\alpha \in S^{P \times P}$ Trigonalmatrix, falls das Supportnetzwerk $\mathcal{N}(P, supp\ \alpha)$ fast azyklisch ist.
Welche der folgenden Matrizen sind Trigonalmatrizen? Zeichne hierzu das jeweilige Supportnetzwerk.

$$(1): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Zusatzaufgabe 1 (5 Punkte):

(a) Stellen Sie folgendes Netzwerk als Kreuztabelle dar:




(b) Stellen Sie folgende Kreuztabelle als Netzwerk dar:

| | p | v | w | q |
|---|---|---|---|---|
| p | | x | x | |
| v | | | | x |
| w | x | | | x |
| q | | | | x |

## Zusatzaufgabe 2 (15 Punkte):

Zeige: Im reellen Matrizenring ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ trigonalisierbar, nicht aber $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

## Erweiterungsaufgabe (20 Punkte):

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{3,3} := \mathbb{R}^{[3]\times[3]}$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x \star \alpha$-

a) Zeige für $\lambda \in \mathbb{R}$und $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\lambda & sin\,\lambda \\ 0 & -sin\,\lambda & cos\,\lambda \end{pmatrix}$, dass $\varphi$ eine eigentliche Bewegung ist in $\mathbb{E}^3$.

Interpretiere geometrisch!

b) Begründe, dass $((1,0,0), (0, cos\,\lambda, sin\,\lambda), (0, -sin\,\lambda, cos\,\lambda))$ positiv orientierte ON-Basis von $\mathbb{E}^3$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Überprüfe für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\lambda & sin\,\lambda \\ 0 & -sin\,\lambda & cos\,\lambda \end{pmatrix}$ ähnlich zu $\alpha' = \begin{pmatrix} cos\,\lambda & sin\,\lambda & 0 \\ -sin\,\lambda & cos\,\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist via Permutationsmatrix $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d.h. $\alpha \star \beta = \beta \star \alpha'$).

# Teil II

# Theorie

### Aufgabe 1 (10 Punkte):

Sei $\mathbb{M} = (M, \star, e)$ Monoid. Eine Involution (verallgemeinerte Spiegelung) von $\mathbb{M}$ sei definiert als involutorischer Automorphismus $\varphi$ von $\mathbb{M}$ (d.h. für alle $x,\ y \in M$ gilt $\varphi(x \star y) = \varphi x \star \varphi y$ und $\varphi e = e$, sowie $\varphi(\varphi x) = x$).

Zeige: Ist $\varphi$ Involution und $\alpha$ Automorphismus von$\mathbb{M}$, so ist auch $\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ eine Involution von $\mathbb{M}$.

### Aufgabe 2 (10 Punkte):

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring und sei P endliche, nichtleere Menge.

Begründe $supp(u+w) \subseteq supp\, u \ \cup \ supp\, w$ und
$supp(u \star w) \subseteq supp\, u \ \star \ supp\, w$ für alle $u,\ w \in S^{P \times P}$

### Aufgabe 3 (10 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ Modul über einem Ring mit $\mathbb{S}$.

Dann bezeichne $L\mathcal{M} := \{U \subseteq M \ |\text{U bildet Unterraum von } \mathcal{M}\}$ und $\mathbb{L}\mathcal{M} := (L\mathcal{M}, \subseteq)$ sei der sogenannte Unterraumverband von $\mathcal{M}$.
Anmerkung: Ist $\mathbb{S}$ Divisionsring, so nennt man $\mathbb{L}\mathcal{M}$ auch die zu $\mathcal{M}$ gehörige projektive Geometrie.

Überprüfe, dass $\mathbb{L}\mathcal{M}$ modular ist, d.h. es gilt:

$$\forall X, Y, Z \in L\mathcal{M}(X \subseteq Z \Rightarrow (X+Y) \cap Z = X + (Y \cap Z))$$

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

## Aufgabe 4 (10 Punkte):

Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ ein vollständiger Verband, welcher modular ist (d.h. $x \leq u \Rightarrow (x \vee z) \wedge u = x \vee (z \wedge u)$). Außerdem sei $(z, u)$ ein komplementäres Paar in $\mathbb{L}$ (d.h. $u \wedge z = 0_{\mathbb{L}}$ und $u \vee z = 1_{\mathbb{L}}$).

(1) Zeige für $L_u := \{x \in L \mid x \leq u\}$, dass die Abbildung

$$\varepsilon : L \to L_u, \quad x \mapsto (x \vee z) \wedge u$$

eine Retraktion von $\iota : L_u \to L$, $x \mapsto x$ ist (d.h. $\varepsilon \circ \iota = id_{L_u}$ ).
Anmerkung: Die zugehörige Projektion ist dann $\iota \circ \varepsilon$.

(2) Begründe für alle $x, y \in L$ :

$$(x \vee z) \wedge u \leq y \Leftrightarrow x \leq (y \wedge u) \vee z.$$

## Aufgabe 5 (15 Punkte):

Vorbereitung: "Affine Geometrie im modularen Verband"

Situation: Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ modularer vollständiger Verband und besitze $h \in L$ ein Komplement in $\mathbb{L}$.

Wir betrachten das "geometrische Setup" $\mathcal{G} := (\mathbb{L}, h)$.

Geometrische Interpretation: Die Elemente aus $\mathbb{L}$ heissen (geometrische) Räume, $0_{\mathbb{L}}$ ist der "leere Raum" (Nullraum) und $1_{\mathbb{L}}$ ist der "ganze Raum" (Einsraum); $x \leq y$ besagt, dass $x$ mit $y$ inzidiert, d.h. $x$ liegt in bzw. auf $y$.

Ein Raum $x$ ist affin bzgl. $\mathcal{G}$, falls $x \vee h = 1_{\mathbb{L}}$ oder $x = 0_{\mathbb{L}}$ gilt; ist $x \vee h = 1_{\mathbb{L}}$, so ist $x$ ein echter affiner Raum, und ist $x$ Komplement von $h$ in $\mathbb{L}$, so ist $x$ affiner Punkt bezüglich $\mathcal{G}$.

Der Raum $h$ heißt die Fernhyperebene und jedes $t \leq h$ nennen wir Fernraum bzgl. $\mathcal{G}$; ist $x$ affiner Raum, so ist $t = x \wedge h$ der Fernraum zu $x$ bzgl. $\mathcal{G}$. Ein Paar $(x, y)$ von affinen Räumen ist parallel, in Zeichen $x \parallel y$, falls $x = 0_{\mathbb{L}} = y$ oder $x \wedge h = y \wedge h$ und $x \neq 0_{\mathbb{L}} \neq y$ gilt. Somit sind zwei echte affine Räume genau dann parallel, wenn ihre Fernräume gleich sind.

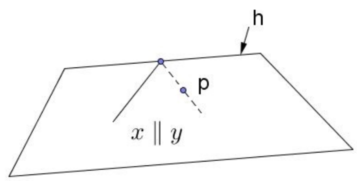
Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

Definition: Bezeichnet $\mathsf{Aff}\mathcal{G}$ die Menge der affinen Räume bzgl. $\mathcal{G}$, so ist die affine Geometrie zu $\mathcal{G}$ gegeben durch $\mathbb{A}\mathsf{ff}\mathcal{G} := (\mathsf{Aff}\mathcal{G}, \leq, \|)$.

Zeige das euklidische Parallelenpostulat:
Zu jedem affinen Raum $x$ und jedem affinen Punkt $p$ existiert genau ein affiner Raum $y \parallel x$ mit $p \leq y$.




## Aufgabe 6 (20 Punkte):

Sei $\mathbb{S}$ ein Semiring und $P$ eine endliche, nichtleere Menge. Ferner seien $\alpha, \alpha' \in S^{P\times P}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige dann:

(1) Ist $\alpha$ Trigonalmatrix, so ist auch $\alpha^n$ Trigonalmatrix. Ist $\alpha$ ähnlich zu $\alpha'$ via $\beta \in GL_P\mathbb{S}$ (d.h. $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$), so ist auch $\alpha^n$ ähnlich zu $(a')^n$ via $\beta$.

(2) Sei nun $\mathbb{S}$ ein kommutativer Ring. Ist $\alpha$ Trigonalmatrix, so ist $\det \alpha = \prod_{p\in P} \alpha(p,p)$. Ist $\alpha$ ähnlich zu $\alpha'$, so ist $\det \alpha = \det \alpha'$.

## Aufgabe 7 (5 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ Modul über einem Ring $\mathbb{S}$ und sei $\varphi \in End\mathcal{M}$. Es ist $U \in L\mathcal{M}$ ein $\varphi$- invarianter Unterraum, falls $\varphi U \subseteq U$ gilt.
Begründe folgende Aussage:

$Eig(\varphi, s) := \{v \in M \mid \varphi v = s \cdot v\}$ ist $\varphi$-invariant für alle $s \in S$.

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

---

## Aufgabe 8 (20 Punkte):

Ein Semiring heisse <u>halbierbar</u>, falls in ihm $2 := 1 + 1$ ein multiplikatives Inverses besitzt.

Sei $\mathcal{M}$ Modul über einem halbierbaren Ring $\mathbb{S}$.

Begründe für jede Abbildung $\varphi : M \to M$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $\varphi$ ist <u>Schrägspiegelung</u> von $\mathcal{M}$, d.h. $\varphi$ ist involutorischer Automorphismus von $\mathcal{M}$ (d.h. $\varphi \in End\mathcal{M}$ mit $\varphi \circ \varphi = id_M$).

ii) Es existiert ein komplementäres Paar $(U, W)$ von Unterräumen in $\mathcal{M}$ (d.h. $U, W \in L\mathcal{M}$ mit $U + W = M$ und $U \cap W = \{\vec{0}\}$) derart, dass

$$\boxed{\varphi(u + w) = u - w}$$

für alle $u \in U$ und $w \in W$ gilt.

## Zusatzaufgabe (20 Punkte):

Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathbb{E}^N := (\mathbb{R}^N, b)$ für eine endliche, nichtleere Menge $N$ (mit $b(x, y) = x \star y = \sum\limits_{i \in N} x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^N$).

Zeige, dass für jeden Automorphismus $\varphi$ des $\mathbb{R}^N$ folgende Aussage gilt:

$\varphi$ ist <u>winkeltreu</u> bzgl. $\mathbb{E}^N$ (d.h. $\sphericalangle(\varphi x, \varphi y) = \sphericalangle(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^N - \{\vec{0}\}$, wobei $\cos \sphericalangle(x, y) := \frac{x \star y}{\|x\| \cdot \|y\|}$) und erhält $\varphi$ die Norm eines $u \in \mathbb{R}^N - \{\vec{0}\}$, (d.h. $\|\varphi u\| = \|u\|$), so ist $\varphi$ normtreu (d.h. $\|\varphi x\| = \|x\|$).

## Erweiterungsaufgabe (20 Punkte):

Sei $N$ endliche, nichtleere Menge, und bezeichne $U := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}$ die Einheissphäre des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}^N$. Zeige für die <u>orthogonale Gruppe</u> $O(\mathbb{E}^N)$ aller orthogonalen Abbildungen von $\mathbb{E}^N$ in sich, dass $O(\mathbb{E}^N) = Aut(\mathbb{R}^N, U)$ gilt.