

Ü13 C1 "Geometrische Objekte, Invarianz & Symmetrie:
Die Einheitskugel & die orthogonale Gruppe"

(a) Sei M Modul über einem Ring S .
Zeige für jedes "geometrische Objekt" T in M
(d.h. $T \in M$), dass $\text{Aut}(M, T) := \{\varphi \in \text{Aut } M \mid \varphi T = T\}$
eine Untergruppe von $\text{Aut}(M) := (\text{Aut } M, \circ, \text{id}_M)$ bildet.

(b) Sei N endliche, nichtleere Menge, und bezeichne
 $U := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitskugel
des euklidischen Vektorraumes \mathbb{E}^N .

Zeige für die orthogonale Gruppe $O(\mathbb{E}^N)$: aller
orthogonalen Abbildungen von \mathbb{E}^N in sich, dass

$$O(\mathbb{E}^N) = \text{Aut}(\mathbb{R}^N, U) \text{ gilt.}$$

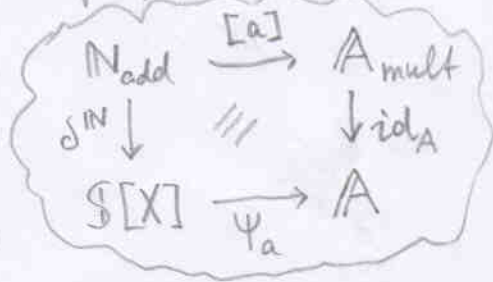
(c) Bestimme $\text{Aut}(\mathbb{R}^2, \{-1, 1\}^2)$.

C2 "Einsetzungsmorphismus & der Satz von Cayley-Hamilton"

(a) Sei S kommutativer Semiring und A eine Algebra
über S . Bestimme für $a \in A$ und $[a]: \mathbb{N} \rightarrow A, i \mapsto a^i$
den Einsetzungsmorphismus $\psi_a: S[X] \rightarrow A, u \mapsto u * [a]$
(wobei $u * [a] := \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \cdot [a]^i$) und überprüfe, dass

folgendes Diagramm kommutiert:

Nenne dann $u(a) := u * [a]$ die
Einsetzung von $a \in A$ in $u \in S[X]$.



Ü13 C2 (b) Sei S kommutativer Ring und sei N endliche, nichtleere Menge. Zur Erinnerung: Für $\alpha \in S^{N \times N}$ ist das charakteristische Polynom als $\chi_\alpha := \det(x \cdot I_N - \alpha) \in S[X]$ definiert.

Erläutere folgende Aussagen mit Hilfe von (a) und bestimme die hier verwendete S -Algebra A :

• Begründe $\boxed{(\chi_\alpha * \chi_\beta)(\gamma) = \chi_\alpha(\gamma) * \chi_\beta(\gamma)}$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in S^{N \times N}$.

• Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass

$$\boxed{\chi_\alpha(\alpha) = 0} \text{ für alle } \alpha \in S^{N \times N} \text{ gilt.}$$

Erläutere die Aussage und verifiziere sie direkt für $N = [2]$.