Ü13 C1 "Geometrische Objekte, Invarianz & Symmetrie:
Die Einheitssphäre & die orthogonale Gruppe"

(a) Sei $\mathcal{M}$ Modul über einem Ring $\mathbb{S}$.
Zeige für jedes "geometrische Objekt" T in $\mathcal{M}$ (d.h. $T \subseteq M$), dass $\mathrm{Aut}(\mathcal{M},T) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{M} \mid \varphi T = T\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{M}) := (\mathrm{Aut}\,\mathcal{M}, \circ, \mathrm{id}_M)$ bildet.

(b) Sei N endliche, nichtleere Menge, und bezeichne
$$\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}$$
die Einheitssphäre des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}^N$.
Zeige für die orthogonale Gruppe $O(\mathbb{E}^N)$ aller orthogonalen Abbildungen von $\mathbb{E}^N$ in sich, dass
$$O(\mathbb{E}^N) = \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^N, \mathcal{U})$$
gilt.

(c) Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2, \{-1,1\}^2)$.

C2 "Einsetzungsmorphismus & der Satz von Cayley-Hamilton"

(a) Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Semiring und $\mathbb{A}$ eine Algebra über $\mathbb{S}$. Bestimme für $a \in A$ und $[a] : \mathbb{N} \to A,\ i \mapsto a^i$ den Einsetzungsmorphismus $\psi_a : \mathbb{S}[X] \to \mathbb{A},\ u \mapsto u * [a]$ (wobei $u*[a] := \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \cdot [a]_i$) und überprüfe, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_{add} \arrow[r, "{[a]}"] \arrow[d, "\delta^{\mathbb{N}}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathbb{A}_{mult} \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
\mathbb{S}[X] \arrow[r, "\psi_a"'] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

Nenne dann $u(a) := u * [a]$ die Einsetzung von $a \in A$ in $u \in \mathbb{S}[X]$.

Ü13 C2 (b) Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring und sei N endliche, nichtleere Menge. Zur Erinnerung: Für $\alpha \in S^{N\times N}$ ist das charakteristische Polynom als $\chi_\alpha := \det(x \cdot I_N - \alpha) \in \mathbb{S}[X]$ definiert.

Erläutere folgende Aussagen mit Hilfe von (a) und bestimme die hier verwendete $\mathbb{S}$-Algebra $\mathbb{A}$:

- Begründe $\boxed{(\chi_\alpha * \chi_\beta)(\gamma) = \chi_\alpha(\gamma) * \chi_\beta(\gamma)}$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in S^{N\times N}$.
- Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass

  $$\boxed{\chi_\alpha(\alpha) = 0} \text{ für alle } \alpha \in S^{N\times N} \text{ gilt.}$$

  Erkläre die Aussage und verifiziere sie direkt für $N = [2]$.