Lsg Ü12_C1

Zu(a) (1) Sei φ Bewegung des $\mathbb{E}^N$, d.h. φ ist orthogonal (vgl Ü11 C2).
Setze $\gamma := \varphi \circ \delta^N$. Dann ist $\gamma i * \gamma j = \varphi(\delta_i^N) * \varphi(\delta_j^N) = \delta_i^N * \delta_j^N$
$= I_N(i,j)$ für alle $(i,j) \in N \times N$, d.h. γ ist ON-System;
insbesondere ist γ unabhängig & $\gamma : N \to \mathbb{R}^N$, also ist
γ Basis von $\mathbb{R}^N$ (da $\dim \mathbb{R}^N = \# N$).

(2) Sei $\gamma := \varphi \circ \delta^N$ ON-Basis von $\mathbb{E}^N$. Für $x, y \in \mathbb{R}^N$ folgt stets

$$\varphi x * \varphi y = \sum_{(i,j) \in N \times N} x_i y_j \underbrace{\varphi \delta_i^N}_{\gamma i} * \underbrace{\varphi \delta_j^N}_{\gamma j} \underset{\boxed{\gamma \text{ ON-Basis}}}{=} \sum_{(i,j) \in N \times N} x_i y_j \, I(i,j)$$

$$= \sum_{i \in N} x_i y_i = x * y,$$ d.h. φ ist orthogonal

(φ ist bijektiv, da $\varphi = f_\gamma$ & γ Basis), also φ ist Bewegung.

(3) Sei $\varphi = f_\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Dann ist $\varphi = f_\gamma$ für $\gamma := r_\alpha$.
Es folgt $\gamma = \varphi \circ \delta^N$. Somit ist $\gamma i * \gamma j = \alpha(i,\cdot) * \alpha(j,\cdot)$
$= \alpha(i,\cdot) * \alpha^T(\cdot,j) = (\alpha * \alpha^T)(i,j)$ für alle $(i,j) \in N \times N$.

Also gilt: γ ist ~~ON-System~~ ON-Basis
$\iff \forall (i,j) \in N \times N \left(\gamma i * \gamma j = I_N(i,j) \right) \iff \alpha * \alpha^T = I_N$.

Zu(b) $\det \varphi = \det \alpha$ gilt für $\alpha = m\gamma$ mit $\gamma := \varphi \circ \delta^N$.
$\uparrow$ matrix-Maker
Also ist $\varphi = f_\alpha$.
Nach (a) folgt (da φ Bewegung):

$$1 = \det I_N = \det \alpha \cdot \underbrace{\det(\alpha^T)}_{\det \alpha} = (\det \alpha)^2$$

Daher ist $\det \varphi = \det \alpha \in \{-1, 1\}$ und somit $\operatorname{sgn} \varphi = \det \varphi$.

Lsg Ü12_C1 (c)

Sei φ Spiegelung. Folglich ist $X := \mathrm{Eig}(\varphi,1) \cup \mathrm{Eig}(\varphi,-1)$ erzeugend in $\mathbb{R}^N$. Wähle B minimale Teilmenge von X, die $\mathbb{R}^N$ erzeugt. Folglich ist B Basis (als Menge) von $\mathbb{R}^N$, und es gilt $\#B = \#N$. Wähle $\gamma: N \to \mathbb{R}^N$ mit $\gamma N = B$; dann ist γ Basis von $\mathbb{R}^N$.

Für $\varepsilon \in \{-1,1\}$ setze $N_\varepsilon := \gamma^{-1}\mathrm{Eig}(\varphi,\varepsilon)$;

Dann gilt $\varphi\gamma i = \varepsilon\gamma i$ für alle $i \in N_\varepsilon$.

Es ist $\psi := f_\gamma^{-1} \circ \varphi \circ f_\gamma$ ähnlich zu φ, also gilt $\det\psi = \det\varphi$.

Für $\eta := \psi \circ \delta^N$ folgt (wegen $f_\gamma \circ \delta^N = \gamma$):

$$\eta i = (f_\gamma^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)i = f_\gamma^{-1}(\varphi\gamma i) \underset{\uparrow \boxed{\varphi\gamma i = \varepsilon\gamma i}}{=} \varepsilon \cdot f_\gamma^{-1}(\gamma i) = \varepsilon \cdot \delta_i^N$$

(da $\delta^N = f_\gamma^{-1} \circ \gamma$) für alle $i \in N_\varepsilon$ mit $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

Ergebnis: $\det\varphi = \det\psi = \det\eta = (-1)^{\#N_{-1}} = -1$, falls $\dim \mathrm{Eig}(\varphi,-1) = \#N_{-1}$ ungerade ist. ✓

Lsg Ü12_C2

Zu (a) Zeige $\alpha * \alpha^T = I_N$ (genügt wegen Ü12_C1) für $N = [3]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & +\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

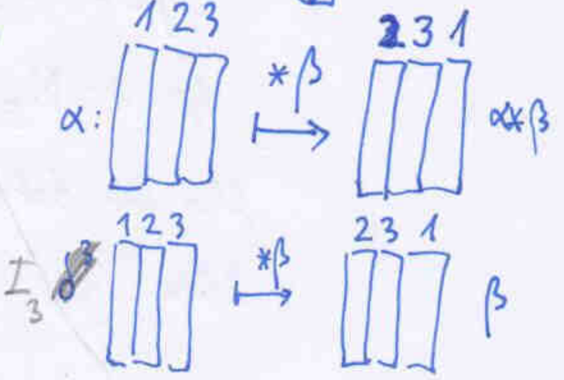
mit $a = \cos^2\lambda + \sin^2\lambda = 1$

und $b = \cos\lambda(-\sin\lambda) + \sin\lambda\cos\lambda = 0$ ✓

(b) Für $((1,0,0),(0,\cos\lambda,\sin\lambda),(0,-\sin\lambda,\cos\lambda)) = v_\alpha =: \gamma$ gilt $\gamma = \varphi \circ \delta^N$; ~~also~~ nach Ü12_C1 ist γ ON-Basis, da $\alpha * \alpha^T = I_N$ (geht auch direkt).

(c) Berechnung $\boxed{\alpha * \beta}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix}$$



Berechnung $\boxed{\beta * \alpha'}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

✓