Ü12_C1 "Orientierung von Vektorfamilien und linearen Abbildungen im $\mathbb{E}^N$"

<u>Vorbereitung</u>: Sei N endliche, nichtleere Menge. Für $\alpha \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und $\gamma := r_\alpha \in (\mathbb{R}^N)^N$ sowie $\varphi = f_\gamma$ führen wir das <u>Signum</u> wie folgt ein:

$$\operatorname{sgn} \gamma := \begin{cases} 1 & \text{falls } \det \gamma > 0 \\ -1 & \text{falls } \det \gamma < 0 \\ 0 & \text{falls } \det \gamma = 0 \end{cases}$$

und $\operatorname{sgn} \alpha := \operatorname{sgn} \varphi := \operatorname{sgn} \gamma$.

<u>Anmerkung</u>: Also ist $\operatorname{sgn} \alpha = \operatorname{sgn} r_\alpha$ und $\operatorname{sgn} \varphi = \operatorname{sgn}(\varphi \circ \delta^N)$.

Wir sagen: "γ bzw. φ hat <u>positive Orientierung</u>", falls

$\operatorname{sgn} \gamma = \operatorname{sgn} \varphi = 1$ ist.

"γ bzw. φ hat <u>negative Orientierung</u>", falls

$\operatorname{sgn} \gamma = \operatorname{sgn} \varphi = -1$ ist.

Ist φ abstandstreu, so nennen wir φ auch eine <u>Bewegung</u> des $\mathbb{E}^N$ (mit Fixpunkt $\vec{0}$).

Ist dabei $\operatorname{sgn} \varphi = 1$, so heisse φ <u>eigentliche Bewegung</u>; ist $\operatorname{sgn} \varphi = -1$ so heisse φ <u>uneigentliche Bewegung</u> des $\mathbb{E}^N$.

<u>Zur Aufgabe</u>: (a) Sei φ Endomorphismus von $\mathbb{R}^N$. Zeige dann folgende Äquivalenz:
- φ ist Bewegung des $\mathbb{E}^N$.
- $\varphi \circ \delta^N$ ist eine ON-Basis von $\mathbb{E}^N$.
- $\alpha * \alpha^T = I_N$ für $\alpha \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit $\varphi = f_\alpha$.

(b) Ist φ Bewegung des $\mathbb{E}^N$, so gilt $\operatorname{sgn} \varphi = \det \varphi$.

(c) Warum ist eine Spiegelung φ des $\mathbb{E}^N$ genau dann eine uneigentliche Bewegung, wenn die Dimension von $\operatorname{Eig}(\varphi, -1)$ ungerade ist?

Ü12_C2 "Bewegungen im $\mathbb{E}^3$".

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{3,3} := \mathbb{R}^{[3]\times[3]}$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x * \alpha$.

(a) Zeige für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}$, dass φ eine

eigentliche Bewegung ist in $\mathbb{E}^3$. Interpretiere geometrisch!

(b) Begründe, dass $((1,0,0), (0,\cos\lambda,\sin\lambda), (0,-\sin\lambda,\cos\lambda))$ positiv orientierte ON-Basis von $\mathbb{E}^3$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Überprüfe für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}$ ähnlich zu

$\alpha' = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist via der Permutationsmatrix

$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d.h. $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$).