LSG Ü11_C2:

Sei φ bij Endo des $\mathbb{R}^N$ und setze $x' := \varphi x$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.

"orthog $\Rightarrow$ normtreu": φ orthog $\Rightarrow x' * y' = x * y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$.
$\Rightarrow x' * x' = x * x$, d.h. $\|x'\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.

"normtreu $\Rightarrow$ abst.treu": φ normtreu $\Rightarrow x' * x' = x * x$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.
Für $p, q \in \mathbb{R}^N$ folgt $\overrightarrow{p'q'} = -p' + q' = (-p+q)' = \overrightarrow{pq}'$, also $d(p', q') = \|\overrightarrow{p'q'}\| = \|\overrightarrow{pq}'\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q)$.

"abst.treu $\Rightarrow$ normtreu": $\|x'\| = d(\vec{0}, x') = d(\vec{0}', x') = d(\vec{0}, x) = \|x\|$

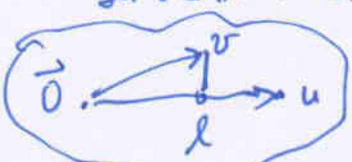
"normtreu $\Rightarrow$ orthog": φ normtreu $\Rightarrow x' * x' = x * x$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.
Für $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt also: $\underbrace{(x+y)' * (x+y)'}_{} = (x+y) * (x+y) = x*x + 2x*y + y*y$

$$(x'+y') * (x'+y') = \underbrace{x' * x'}_{x*x} + 2x' * y' + \underbrace{y' * y'}_{y*y} \Rightarrow 2x' * y' = 2x * y \Rightarrow x' * y' = x * y.$$

"orthog $\Rightarrow$ winkeltreu": φ orthog $\Rightarrow \varphi$ normtreu

$$\Rightarrow \frac{x' * y'}{\|x'\| \cdot \|y'\|} = \frac{x * y}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \text{d.h. } \measuredangle(x', y') = \measuredangle(x, y)$$

"winkeltreu & $\|u'\| = \|u\|$ für ein $u \in \mathbb{R}^N - \{\vec{0}\} \Rightarrow$ normtreu":



Sei $v \in \mathbb{R}^N$. Für den Lotfußpunkt $\ell := \lambda u$ mit $\lambda := \frac{v * u}{u * u}$ von v auf $\mathbb{R}u$ ist auch $\ell' = \lambda u'$ Lotfußpunkt von v' auf $\mathbb{R}u'$ (da φ winkeltreu). Also ist $\frac{v' * u'}{u' * u'} = \frac{v * u}{u * u}$, d.h. $\boxed{v' * u' = v * u}$ $(*)$ (da $u' * u' = u * u$).

Fall 1 $v * u \neq 0$. Aus $\measuredangle(v', u') = \measuredangle(v, u)$ folgt $\frac{v' * u'}{\|v'\| \cdot \|u'\|} = \frac{v * u}{\|v\| \cdot \|u\|}$, also ist $\|v'\| = \|v\|$ wegen $(*)$ und da $\|u'\| = \|u\|$.

Fall 2 $v * u = 0$. Dann ist $w * u \neq 0$ für $w := v + u$. $\overset{\text{Fall 1}}{\Rightarrow} \|w'\| = \|w\|$,

also: $\underbrace{w' * w'}_{} = w * w = v * v + 2v * u + u * u$
$= (v' + u') * (v' + u') = v' * v' + 2v' * u' + u' * u'$ $\Big\}$ $v' * v' = v * v$ (wegen $(*)$ & $u' * u' = u * u$)

d.h. $\|v'\| = \|v\|$.

Lsg $\boxed{\text{Ü11\_H1}}$ $\boxed{\text{TEIL 1}}$: Sei $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathbb{R}^N$ mit $\varphi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^N}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Für $x \in \mathbb{R}^N$ gilt: $-x+\varphi x \perp x+\varphi x$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(-x+\varphi x)*(x+\varphi x)}_{-x*x+\varphi x*\varphi x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi x * \varphi x = x*x$$

$$\Leftrightarrow \|\varphi x\| = \|x\|. \checkmark$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Setze $\gamma := \varphi \circ \delta^N$.

"$\Rightarrow$": φ normtreu $\Rightarrow$ φ orthogonal

$$\Rightarrow \gamma_i * \gamma_j = \varphi(\delta_i^N) * \varphi(\delta_j^N) = \delta_i^N * \delta_j^N = I_N(i,j)$$

für alle $(i,j) \in N \times N$.

$\Rightarrow$ γ ON-System. Da φ Automorphismus, folgt $\gamma = \varphi \circ \delta^N$ Basis (da δ^N Basis).

"$\Leftarrow$" Sei $x \in \mathbb{R}^N$. Dann ist

$$\varphi x = \varphi(\underbrace{x*\delta^N}_{=x}) \underset{\varphi \text{ linear}}{=} x*(\underbrace{\varphi\circ\delta^N}_{\gamma}) = x*\gamma$$

$$\Rightarrow \varphi x * \varphi x = (x*\gamma)*(x*\gamma) = \sum_{i,j\in N} x_i\gamma_i * x_j\gamma_j$$

$$= \sum_{i,j \in N} x_i x_j \underbrace{\gamma_i * \gamma_j}_{= I_N(i,j)} = \sum_{i\in N} x_i x_i = x*x$$

da γ ON-Basis

$\Rightarrow \|\varphi x\| = \|x\|. \checkmark$

Lsg $\boxed{\text{Ü11\_H1}}$ $\boxed{\text{TEIL 2}}$

"$(i) \Rightarrow (iv)$" nach Ü10_C3(b).

$(iv) \Rightarrow (i)$: $Eig(\varphi,1) \oplus Eig(\varphi,-1) = \mathbb{R}^N$ (Ü10_C2(b)).

Sei $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \exists u \in Eig(\varphi,1), w \in Eig(\varphi,-1)$:

$$\boxed{x = u + w}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi x = \varphi u + \varphi w = u - w}$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{u \perp w}$ (da $Eig(\varphi,1) \perp Eig(\varphi,-1)$)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} -x + \varphi x &= -(u+w) + (u-w) = -2w \\ \perp\ 2u &= x + \varphi u \end{aligned}}$$