Ü11_C1 "Determinante einer Summe, charakteristisches Polynom, Eigenwerte"

Vorbereitung: Sei $N$ endliche Menge, und sei $\mathbb{S}$ kommutativer Ring.

Für $\alpha, \beta \in S^{N\times N}$ gilt (Leibniz-Formel):

$$\det(\alpha+\beta) = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}\,N} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \lambda\sigma \quad \text{für } \lambda\sigma := \prod_{i\in N} (\alpha(i,\sigma i)+\beta(i,\sigma i));$$

dann ist $\lambda\sigma = \sum_{J\in 2^N} \lambda(\sigma,J)$ für $\boxed{\lambda(\sigma,J) := \prod_{i\in J} \alpha(i,\sigma i)\cdot \prod_{i\in N-J} \beta(i,\sigma i)}$,

und es folgt:

$$\boxed{\det(\alpha+\beta) = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}\,N} \sum_{J\in 2^N} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\lambda(\sigma,J) = \sum_{J\in 2^N}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}\,N} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\lambda(\sigma,J)}$$

Für $\beta = x\cdot I_N \in (\mathbb{S}[x])^{N\times N}$ (wobei $\mathbb{S}[x]$ der Polynomring von $\mathbb{S}$ sei)

und $\sigma\in\mathrm{Sym}\,N$ sowie $J\in 2^N$

ergibt sich $\displaystyle\prod_{i\in N-J}\beta(i,\sigma i) = \begin{cases} x^{\#(N-J)} & \text{falls } N-J \subseteq \{i\in N \mid \sigma i = i\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Somit ist $\boxed{\lambda(\sigma,J) = \begin{cases} \prod_{i\in J}\alpha(i,\sigma i)\cdot x^{\#(N-J)} & \text{falls } N-J\subseteq\{i\in N\mid \sigma i = i\} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}$,

woraus folgt: $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}\,N} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\lambda(\sigma,J) = (\det\alpha_J)\cdot x^{\#(N-J)} \text{ für } \alpha_J := \alpha|(J\times J)}$

Ergebnis: Für $n := \#N$ und $\binom{N}{k} := \{J\in 2^N \mid \#J = k\}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\boxed{\det(\alpha + x I_N) = \sum_{J\in 2^N} (\det\alpha_J)\cdot x^{n-\#J} = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{J\in\binom{N}{k}} \det\alpha_J\Big)\cdot x^{n-k}}$$

Anwendung: Für das charakteristische Polynom $\boxed{\chi_\alpha := \det(xI_N - \alpha)}$ von $\alpha\in S^{N\times N}$

erhalten wir $\boxed{\chi_\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\cdot\Big(\sum_{J\in\binom{N}{k}}\det\alpha_J\Big)\cdot x^{n-k}}$, wobei $\alpha_J := \alpha|(J\times J)$.

Ü11_C1 Fortsetzung:

<u>Zur Aufgabe</u>: • Spezifiziere $\chi_\alpha$ für $N=[n]$ mit $n\in[3]$.

• Begründe: Ist $\alpha'\in S^{N\times N}$ ähnlich zu $\alpha$, so ist $\chi_{\alpha'}=\chi_\alpha$.

• Sei $S$ Körper. Zeige, dass $\lambda\in S$ Nullstelle von $\chi_\alpha$ ist genau dann, wenn $\lambda$ Eigenwert von $\alpha$ ist.

<u>Zusatz</u>: Ist $\lambda$ Eigenwert von $\alpha$, so ist die Dimension von $\mathrm{Eig}(\alpha,\lambda):=\{v\in S^N \mid v*\alpha=\lambda\cdot v\}$ die <u>geometrische Vielfachheit</u> von $\lambda$ bzgl. $\alpha$; das größte $k\in\mathbb{N}_+$, für das es ein $f\in S[x]$ gibt mit $\chi_\alpha=(x-\lambda)^k\cdot f$, ist die <u>algebraische Vielfachheit</u> von $\lambda$ bzgl. $\alpha$.
Begründe, dass (bzgl. $\alpha$) die geometrische Vielfachheit von $\lambda$ immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von $\lambda$ ist.

---

C2 "Geometrische Kennzeichnungen orthogonaler Abbildungen"

Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathbb{E}^N:=(\mathbb{R}^N,b)$ für eine endliche, nichtleere Menge $N$ (mit $b(x,y)=x*y=\sum_{i\in N} x_i y_i$ für $x,y\in\mathbb{R}^N$).
Für jeden Automorphismus $\varphi$ des $\mathbb{R}^N$ sind äquivalent:

- $\varphi$ ist <u>orthogonal</u> bzgl $\mathbb{E}^N$, d.h. $\varphi x*\varphi y=x*y$ für alle $x,y\in\mathbb{R}^N$.
- $\varphi$ ist <u>normtreu</u> bzgl $\mathbb{E}^N$, d.h. $\|\varphi x\|=\|x\|$ für alle $x\in\mathbb{R}^N$ (wobei $\|x\|:=\sqrt{x*x}$).
- $\varphi$ ist <u>abstandstreu</u> bzgl $\mathbb{E}^N$, d.h. $d(\varphi p,\varphi q)=d(p,q)$ für alle $p,q\in\mathbb{R}^N$ (wobei $d(p,q):=\|\vec{pq}\|$ für alle $p,q\in\mathbb{R}^N$).
- $\varphi$ ist <u>winkeltreu</u>, d.h. $\sphericalangle(\varphi x,\varphi y)=\sphericalangle(x,y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}^N-\{\vec{0}\}$ (wobei $\cos\sphericalangle(x,y):=\frac{x*y}{\|x\|\cdot\|y\|}$), und $\varphi$ erhält die Norm eines $u\in\mathbb{R}^N-\{\vec{0}\}$, d.h. $\|\varphi u\|=\|u\|$.

Gib eine Begründung!