Lsg C2 von Ü10 Zu (a): (ii) $\Rightarrow$ (i) ✓. Zeige nun (i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei $\varphi \in \operatorname{End} M$ mit $\varphi^2 = id_M$.

Setze $U := \{v \in M \mid \varphi v = v\}$ und
$W := \{v \in M \mid \varphi v = -v\}$.

Zeige • $U \oplus W = M$, d.h. $U + W = M$ und $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Bew. Sei $v \in M$. Dann ist $u := \frac{v + \varphi v}{2} \in U$ und $w := \frac{v - \varphi v}{2} \in W$

(denn $\varphi u = \frac{\varphi v + \varphi(\varphi v)}{2} = \frac{\varphi v + v}{2} = u$ & $\varphi w = \frac{\varphi v - \varphi(\varphi v)}{2} = \frac{\varphi v - v}{2} = -w$)

und $v = \frac{v + \varphi v}{2} + \frac{v - \varphi v}{2} = u + w \in U + W$; also ist

$U + W = M$.

Sei $v \in U \cap W$. $\Rightarrow \varphi v = v$ & $\varphi v = -v \Rightarrow v = -v$, d.h. $2v = 0$

d.h. $v = \vec{0}$. Also: $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

• $\varphi(u + w) = \varphi u + \varphi w = u - w$ für alle $u \in U$ & $w \in W$.

Also gilt (i) $\Rightarrow$ (ii). $\square$.

Zu (b) • φ wie in (a) und U, W ebenfalls. Dann ist $U = \operatorname{Eig}(\varphi, 1)$ und $W = \operatorname{Eig}(\varphi, -1)$ und

$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, -1) = M$ wegen (a). ✓

• $\varphi^2 = \varphi$. Sei $U := \{v \in M \mid \varphi v = v\}$ &
$W := \{v \in M \mid \varphi v = \vec{0}\}$ ✓

Dann ist $U \oplus W = M$ & $U = \operatorname{Eig}(\varphi, 1)$, $W = \operatorname{Eig}(\varphi, 0)$.

Lsg Ü10 _ C3

Zu (a) • $X \subseteq Y^\perp \overset{\checkmark}{\Leftrightarrow} X \perp Y \overset{\checkmark}{\Leftrightarrow} Y \subseteq X^\perp$

• $X^\perp \subseteq X^\perp$ stimmt $\overset{\text{1.}}{\Rightarrow} X \subseteq (X^\perp)^\perp$. ✓

• $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp = \bigcap \{ y^\perp \mid y \in Y \} \underset{X \subseteq Y}{\subseteq} \bigcap \{ x^\perp \mid x \in X \} = X^\perp$. ✓

Zu (b): Sei $\underset{\varphi u = u}{u \in Eig(\varphi, 1)}$ & $\underset{\varphi w = -w}{w \in Eig(\varphi, -1)}$. Zu zeigen $u \perp w$.

$x := \frac{u+w}{2}$. $\Rightarrow \underbrace{-x + \varphi x}_{} \perp \underbrace{x + \varphi x}_{}$

$-\frac{u+w}{2} + \frac{\varphi u + \varphi w}{2}$ $\qquad$ $\underbrace{\frac{u+w}{2} + \frac{\overset{u}{\varphi u} + \overset{-w}{\varphi w}}{2}}_{2u}$

$= -u-w + \underset{u}{\varphi u} + \underset{-w}{\varphi w} = -2w$

dann: $2u \perp 2w \Rightarrow u \perp w$

Also $Eig(\varphi, 1) \perp Eig(\varphi, -1)$.

<u>Lsg</u> Ü10_H1: φ ist Spiegelung an der Geraden g.

<u>Begründung</u> (1) $(\varphi x) * u = -x * u + 2 \cdot \frac{x * u}{u * u} \cdot u * u = x * u$.

Also ist $\boxed{(\varphi x) * u = x * u}$

(2) $\varphi(\lambda u) = -\lambda u + 2 \cdot \frac{(\lambda u) * u}{u * u} \cdot u$

$= -\lambda u + 2 \lambda u = \lambda u$

d.h. $\boxed{\varphi x = x}$ für alle $x \in g$.

(3) Wegen (1) ist $(-x + \varphi x) * u = 0$.
Außerdem ist $x + \varphi x \in \mathbb{R}u$, also
$\boxed{-x + \varphi x \perp x + \varphi x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$.

(4) $\varphi(\varphi x) = -\varphi x + 2 \cdot \frac{(\varphi x) * u}{u * u} \cdot u$

$= -\varphi x + 2 \cdot \frac{x * u}{u * u} \cdot u = x$

dh. $\varphi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^p}$

Analog: $-\varphi$ ist Spiegelung und für $x \in g^\perp$

Zu ist $x * u = 0$, also:

$(-\varphi)x = -\varphi x = x - 2 \cdot \frac{x * u}{u * u} \cdot u = x$,

dh. $g^\perp$ ist Achse der Spieglung $-\varphi$.