Ü10_ C1 "Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, invariante Unterräume"

Vorbereitung Sei M Modul über einem kommutativen Ring S und sei $\varphi \in \operatorname{End} M$.

Vereinbarungen:

- Für $v \in M$ und $s \in S$ ist v "Eigenvektor zum Eigenwert s bzgl φ", falls $\varphi v = s \cdot v$ gilt.
- Es ist $s \in S$ Eigenwert von φ, falls ein $v \in M - \{\vec{0}\}$ mit $\varphi v = s \cdot v$ existiert; dann bezeichne $\operatorname{EigValue}(\varphi)$ die Menge der Eigenwerte von φ.
- Es ist $v \in M$ Eigenvektor von φ, falls $v \neq \vec{0}$ ist und ein $s \in S$ mit $\varphi v = s \cdot v$ existiert.
- Für $s \in S$ sei $\operatorname{Eig}(\varphi, s) := \{v \in M \mid \varphi v = s \cdot v\}$; ist s Eigenwert von φ, so heißt $\operatorname{Eig}(\varphi, s)$ Eigenraum von φ zu s.
  Gilt $\sum_{s \in S} \operatorname{Eig}(\varphi, s) = M$, so hat φ eine Eigenraumzerlegung
  $$(\operatorname{Eig}(\varphi, s) \mid s \in \operatorname{EigValue}(\varphi)).$$
- Es ist $U \in LM$ ein φ-invarianter Unterraum, falls $\varphi U \subseteq U$ gilt.

Zur Aufgabe Erläutere für $\varphi \in \operatorname{End} M$ folgende Aussagen:

- $\operatorname{Eig}(\varphi, s) = \operatorname{Ker}(\varphi - s \cdot id_M)$ für alle $s \in S$.
- $\operatorname{Eig}(\varphi, r) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, s) = \{\vec{0}\}$ für $r, s \in S$ mit $r \neq s$, falls S Körper ist.
- $\operatorname{Eig}(\varphi, s)$ ist φ-invariant für alle $s \in S$.
- Existiert eine Basis $\eta : P \to M$ von M bestehend aus Eigenvektoren von φ (d.h. ηp ist Eigenvektor von φ für jedes $p \in P$), so ist φ diagonalisierbar. In diesem Fall hat φ eine Eigenraumzerlegung.

Ü10_C2 "Schrägspiegelungen & Projektionen & ihre Eigenraumzerlegungen"

Ein Semiring heisse <u>halbierbar</u>, falls in ihm $2 := 1+1$ ein multiplikatives Inverses besitzt.

Sei M Modul über einem halbierbaren Ring $\mathbb{S}$.

(a) Begründe für jede Abbildung $\varphi : M \to M$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) φ ist <u>Schrägspiegelung</u> von M, d.h. φ ist involutorischer Automorphismus von M (d.h. $\varphi \in \operatorname{End} M$ mit $\varphi \circ \varphi = id_M$).

(ii) Es existiert ein komplementäres Paar (U, W) von Unterräumen in M (d.h. $U, W \in \mathrm{L}M$ mit $U + W = M$ und $U \cap W = \{\vec{0}\}$) derart, dass

$$\boxed{\varphi(u+w) = u - w}$$

für alle $u \in U$ und $w \in W$ gilt.

(b) Folgere (falls $\mathbb{S}$ kommutativ ist):

- Jede Schrägspiegelung φ von M hat als Eigenraumzerlegung: $(\mathrm{Eig}(\varphi, 1), \mathrm{Eig}(\varphi, -1))$.
- Jede Projektion φ von M (d.h. $\varphi \in \operatorname{End} M$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$) hat als Eigenraumzerlegung: $(\mathrm{Eig}(\varphi, 1), \mathrm{Eig}(\varphi, 0))$.

<u>Anmerkung</u> Genau genommen ist hier $\varphi \neq id_M$ vorausgesetzt.

Ü10_C3 "Orthogonalität & Spiegelungen"

<u>Vorbereitung</u> Sei $\mathcal{M}$ Modul über einem Ring $\mathbb{S}$ und sei b Bilinearform auf $\mathcal{M}$ (d.h. $b: M \times M \to S$ ist bilineare Abbildung von $\mathcal{M}^{[2]}$ nach $\mathbb{S}$).
Für $u, w \in M$ sagen wir dann, dass u <u>orthogonal</u> zu w ist in $(\mathcal{M}, b)$, kurz $u \perp w$, falls $b(u,w) = 0$ gilt.
Entsprechend ist $X \in 2^M$ <u>orthogonal</u> zu $Y \in 2^M$ in $(\mathcal{M}, b)$, kurz $X \perp Y$, falls $x \perp y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt.

<u>Anmerkung</u>: Für $u \in M$ und $X \in 2^M$ sind $u^\perp := \{v \in M \mid u \perp v\}$ und $X^\perp := \{v \in M \mid \forall x \in X: x \perp v\}$ Unterräume von $\mathcal{M}$ mit

$$\boxed{X^\perp = \bigcap \{x^\perp \mid x \in X\}}$$

Wir nennen $u^\perp$ bzw. $X^\perp$ den <u>Orthogonalraum</u> zu u bzw. X in $(\mathcal{M}, b)$. —

Im Weiteren sei b <u>orthosymmetrisch</u> (d.h. $\boxed{x \perp y \Leftrightarrow y \perp x}$ für alle $x, y \in M$).

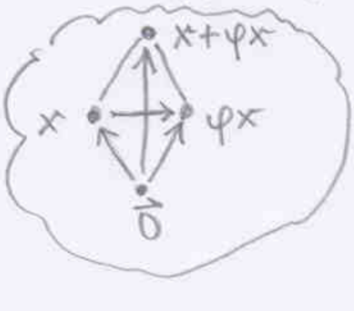
<u>Zur Aufgabe</u>:

(a) Zeige für alle $X, Y \in 2^M$:

- $X \subseteq Y^\perp \Leftrightarrow X \perp Y \Leftrightarrow Y \subseteq X^\perp$
- $X \subseteq (X^\perp)^\perp$
- $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$

(b) Sei $\mathbb{S}$ halbierbar. Eine <u>Spiegelung</u> von $(\mathcal{M}, b)$ ist erklärt als Schrägspiegelung φ von $\mathcal{M}$ derart, dass

$$\boxed{-x + \varphi x \perp x + \varphi x} \text{ für alle } x \in M \text{ gilt.}$$



Begründe für diesen Fall: $\boxed{\mathrm{Eig}(\varphi, 1) \perp \mathrm{Eig}(\varphi, -1)}$

Also: "$\mathrm{Eig}(\varphi, 1)$ ist Orthokomplement von $\mathrm{Eig}(\varphi, -1)$"