Ü9 C1(a) Vorüberlegung:

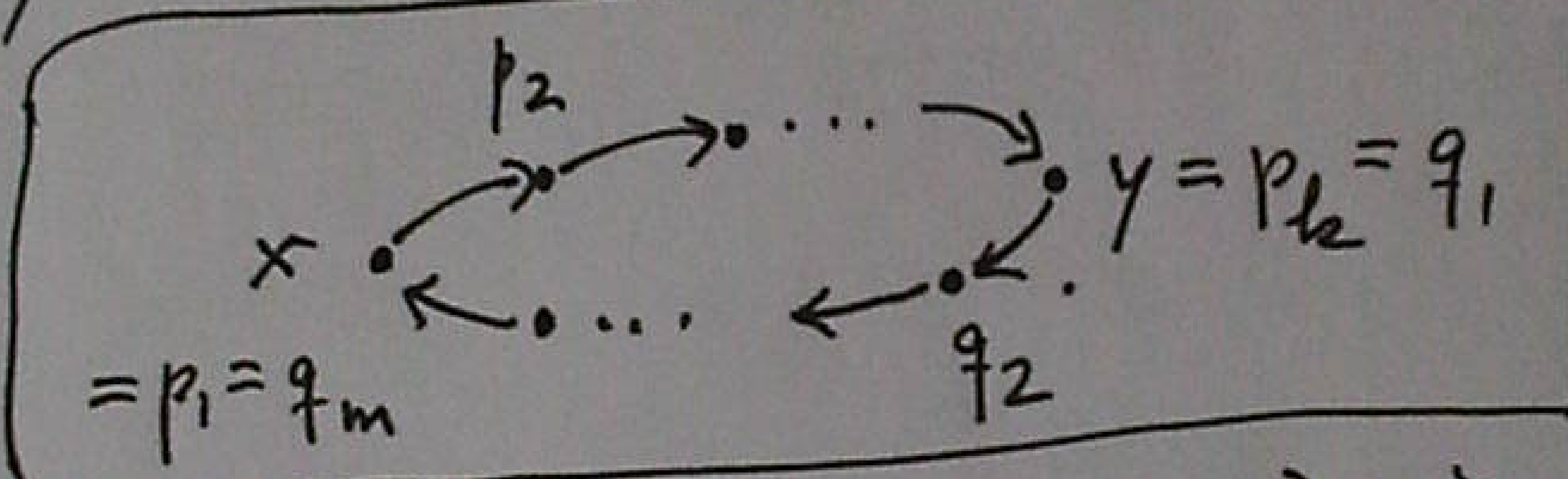
Ist $(P,R)$ binäres Relat, so ist $R$ fast azyklisch genau dann, wenn $R$ in einer Ordnungsrelation enthalten ist.

Zum Beweis: Ist $R \subseteq T$ und $T$ Ordnungsrelation auf $P$, so ist $T$ fast azyklisch; also ist auch $R$ fast azyklisch auf $P$.

Sei umgekehrt $R$ fast azyklisch auf $P$. Der transitive reflexive Abschluss von $R$ (auf $P$) ist gerade $R^{(*)} := \bigcup\{R^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei $R^{(i+1)} := R * R^{(i)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $R^{(0)} := \Delta_P := \{(p,p) \mid p \in P\}$; also ist $R^{(1)} = R$ und folglich $R \subseteq R^{(*)}$.

Behauptung: $R^{(*)}$ ist Ordnungsrelation auf $P$.

Angenommen, es existieren $x, y \in P$ mit $x \neq y$ und $x R^{(*)} y R^{(*)} x$. Dann existiert in $N(P,R)$ ein Knotenpfad $(p_1, \dots, p_k)$ von $x$ nach $y$ und ein Knotenpfad $(q_1, \dots, q_m)$ von $y$ nach $x$:




Dann aber ist $(p_1, \dots, p_k, q_2, \dots, q_m)$ ein geschlossener Pfad in $N(P,R)$ mit $p_1 \neq p_k$ ↯ (da $R$ fast azyklisch).

- Anwendung: Sei $\alpha \in S^{P \times P}$ Trigonalmatrix und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\alpha^n$ Trigonalmatrix.

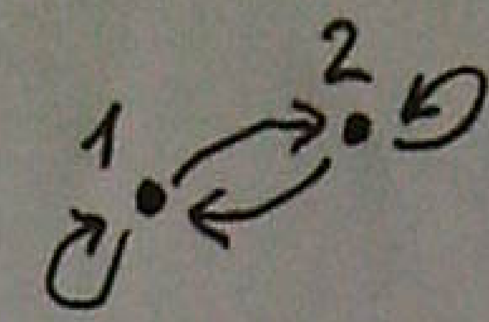
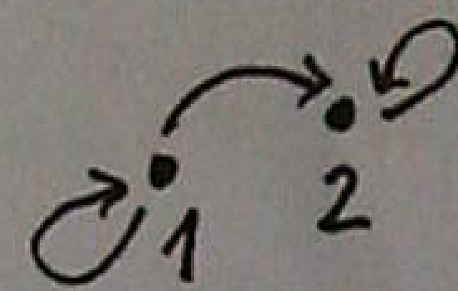
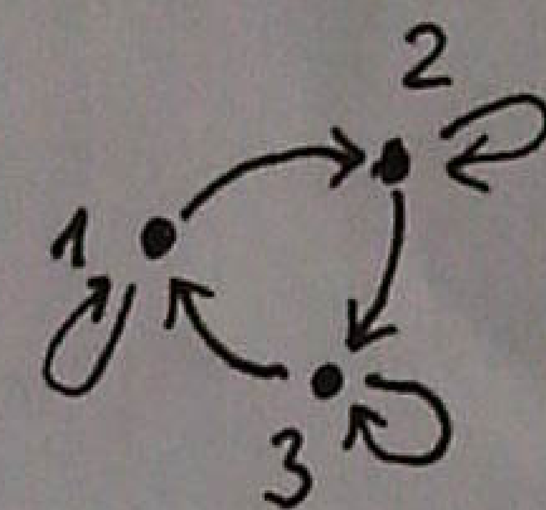
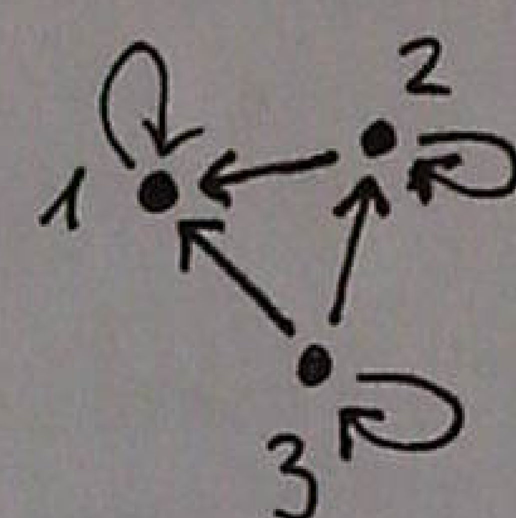
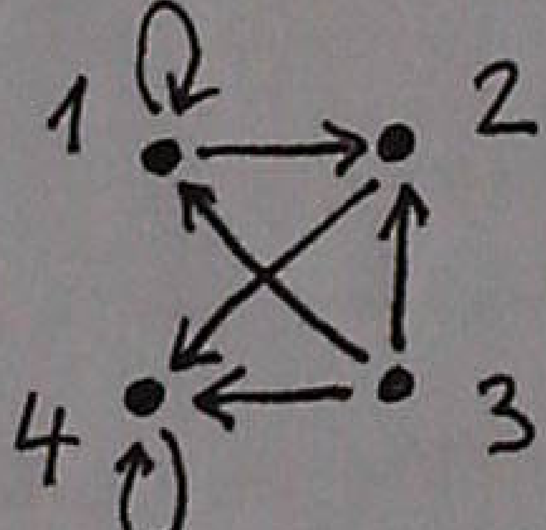
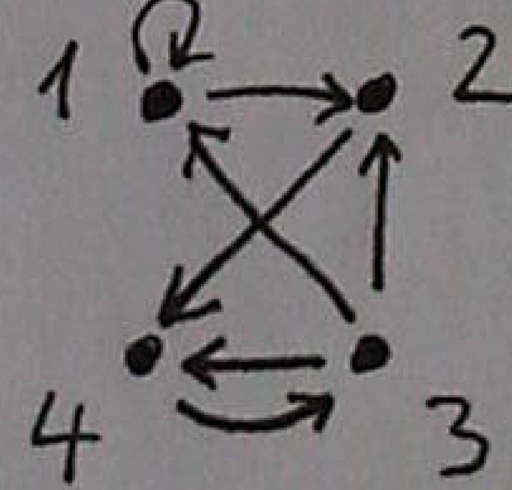
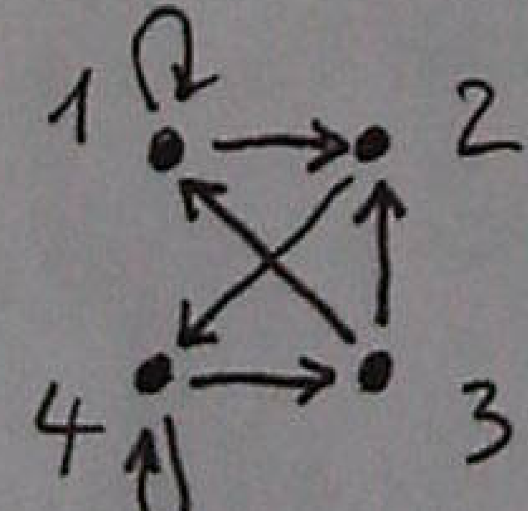
Begründung: Nach obiger Überlegung existiert eine Ordnungsrelation $T$ auf $P$ mit $\operatorname{supp} \alpha \subseteq T$. Da $T$ reflexiv und transitiv ist, folgt $\operatorname{supp}(\alpha^n) \subseteq (\operatorname{supp} \alpha)^{(n)} \subseteq T$, dh. $\operatorname{supp}(\alpha^n)$ ist in einer Ordnungsrelation enthalten und somit fast azyklisch, dh. $\alpha^n$ ist Trigonalmatrix. ✓

Ü1 H2c

- Sei $\alpha$ ähnlich $\alpha'$ via $\beta$ (wo $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Mat}_P S$ und $\beta \in GL_P S$), dh. $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann auch $\alpha^n * \beta = \beta * (\alpha')^n$.

Denn (Induktion nach $n$): Für $n \in \{0,1\}$ stimmts n. V. Sei $n > 1$ und gelte $\alpha^{n-1} * \beta = \beta * (\alpha')^{n-1}$. Dann ist $\alpha^n * \beta = \alpha^{n-1} * \underline{\alpha * \beta} = \alpha^{n-1} * \underline{\beta * \alpha'} = \beta * (\alpha')^{n-1} * \alpha' = \beta * (\alpha')^n$, also ist $\alpha^n$ ähnlich $(\alpha^n)'$. ✓

Ü9 C1(b)

| Matrix | Netzwerk | Trigonalmatrix? |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ |  | NEIN : Knotenpfad (1,2,1) |
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |  | JA : Netzwerk ist fast azyklisch. |
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |  | NEIN : Knotenpfad : (1,2,3,1) |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |  | JA : Netzwerk ist fast azyklisch |
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |  | JA : Netzwerk ist fast azyklisch |
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |  | NEIN : Knotenpfad (3,4,3) |
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |  | NEIN : Knotenpfad (1,2,4,3,1) |

Ü9 C1(c) Verwende $\det(\alpha * \beta) = \det\alpha \cdot \det\beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Mat}_p S$ und $\det I_p = 1$.

Seien nun $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Mat}_p S$.

- Ist $\alpha$ ähnlich $\alpha'$ via $\beta \in \mathrm{Gl}_p S$, so ist $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$. Dann ist $\det\beta \neq 0$ wegen $\det\beta \cdot \det(\beta^{-1}) = \det(\beta * \beta^{-1}) = \det I_p = 1$, und es folgt wegen $\det\alpha \cdot \det\beta = \det(\alpha * \beta) = \det(\beta * \alpha') = \det\beta \cdot \det\alpha'$ stets $\det\alpha = \det\alpha'$.
- Sei $\alpha$ Trigonalmatrix, d.h. $\operatorname{supp}\alpha$ ist fast azyklisch. Nach der Leibnizformel ist

$$\boxed{\det\alpha = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\, P} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \prod_{p \in P} \alpha(p, \sigma p)}$$

Angenommen, es existiert ein $\sigma \in \mathrm{Sym}\, P$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_P$ derart, dass $\prod_{p\in P} \alpha(p, \sigma p) \neq 0$ ist; dann ist $\{(p, \sigma p) \mid p \in P\} \subseteq \operatorname{supp}\alpha$. Da $\sigma \neq \mathrm{id}_P$ ist, existiert ein $q \in P$ mit $\sigma q \neq q$. Weil $\{\sigma^i q \mid i \in \mathbb{N}\}$ endlich ist existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ und $\sigma^i q = \sigma^j q$; für $k := j - i$ folgt $\sigma^k q = q$. Folglich ist $(q, \sigma q, \dots, \sigma^{k-1} q, q)$ ein geschlossener Knotenpfad in $\mathcal{N}(P, \operatorname{supp}\alpha)$ mit $q \neq \sigma q$ ↯ (da $\operatorname{supp}\alpha$ fast azyklisch).

Hieraus folgt direkt: $\det\alpha = \prod_{p \in P} \alpha(p,p)$ (für $\sigma = \mathrm{id}_P \in \mathrm{Sym}\, P$). ✓

Ü9 H1 Für $\alpha, \alpha' \in Mat_2 \mathbb{R}$ gilt: $\alpha$ ähnlich $\alpha'$ via $\beta \in GL_2 \mathbb{R}_*$ genau dann, wenn $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$.

Sei $\alpha'$ Trigonalmatrix, d.h. ohne Einschränkung $\alpha' = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ für gewisse $x, y, z \in \mathbb{R}$. Sei $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Fall 1: $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\alpha * \beta = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ und

$\beta * \alpha' = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ cx & cy+dz \end{pmatrix}$. Wegen $xz = \det\alpha' = \det\alpha = -1$

Ansatz 1 setzen wir $x = -1$; also ist $z = 1$.

Ansatz 2 Dann ist $c = ax = -a$. Für $b = 0$ folgt $\beta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & d \end{pmatrix}$.

$\alpha * \beta = \beta * \alpha'$ ist nun äquivalent zu $\begin{pmatrix} -a & d \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & ay \\ a & -ay+d \end{pmatrix}$

dh. zu $ay = d$. Wähle also zum Beispiel $a = 1 = y$.

Ergebnis $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\alpha' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dh.

$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu $\alpha' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ via $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dh.

$\alpha$ ist trigonalisierbar.

Fall 2: $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\alpha * \beta = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ und

$\beta * \alpha' = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ cx & cy+dz \end{pmatrix}$. Daher folgt aus $\alpha * \beta = \beta * \alpha'$ bereits $c = ax$ und $-a = cx$. Somit ist $ax^2 = cx = -a$,

dh. $a(x^2+1) = 0$, also ist $a = 0$ und daher auch $c = ax = 0$,

im Widerspruch zu $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2 \mathbb{R}$.

Also ist $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht trigonalisierbar.

✓

Ü9 H2 Sei $N$ endliche nichtleere Menge.

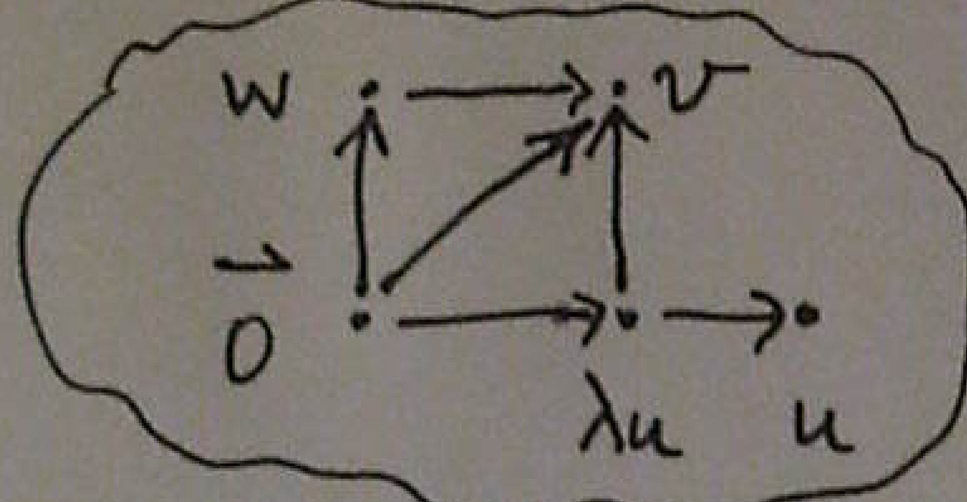
(b) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ mit $z = x+y$ gilt:

$$x*x + y*y = z*z \iff x*x + y*y = (x+y)*(x+y) = x*x + 2x*y + y*y$$
$$\iff 0 = 2x*y \iff x*y = 0 \iff x \perp y.$$

✓

(c) Seien $u, v \in \mathbb{R}^N$ mit $u \neq \vec{0}$.

Gesucht ist $w \in \mathbb{R}^N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $w + \lambda u = v$ und $w \perp u$:



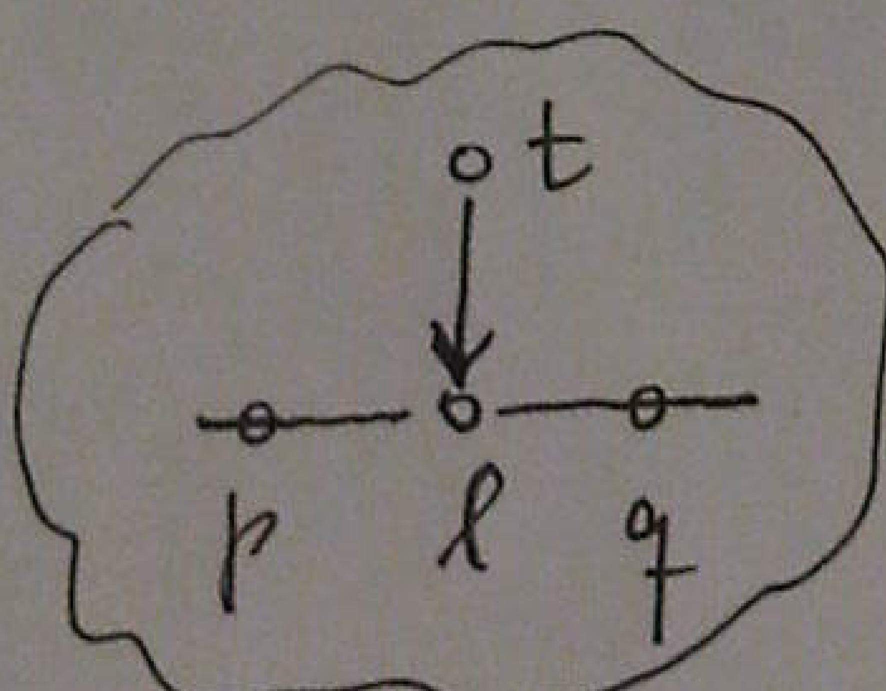

Lösung: $w + \lambda u = v \Rightarrow w = v - \lambda u$. Also ergibt $w \perp u$ gerade

$0 = w*u = (v - \lambda u)*u = v*u - \lambda u*u$, dh. $\lambda = \dfrac{v*u}{u*u}$.

Also ist $w = v - \lambda u = v - \dfrac{v*u}{u*u} \cdot u$

Probe: $w*u = \left(v - \dfrac{v*u}{u*u} \cdot u\right)*u = v*u - \dfrac{v*u}{u*u} \cdot u*u = 0$. ✓

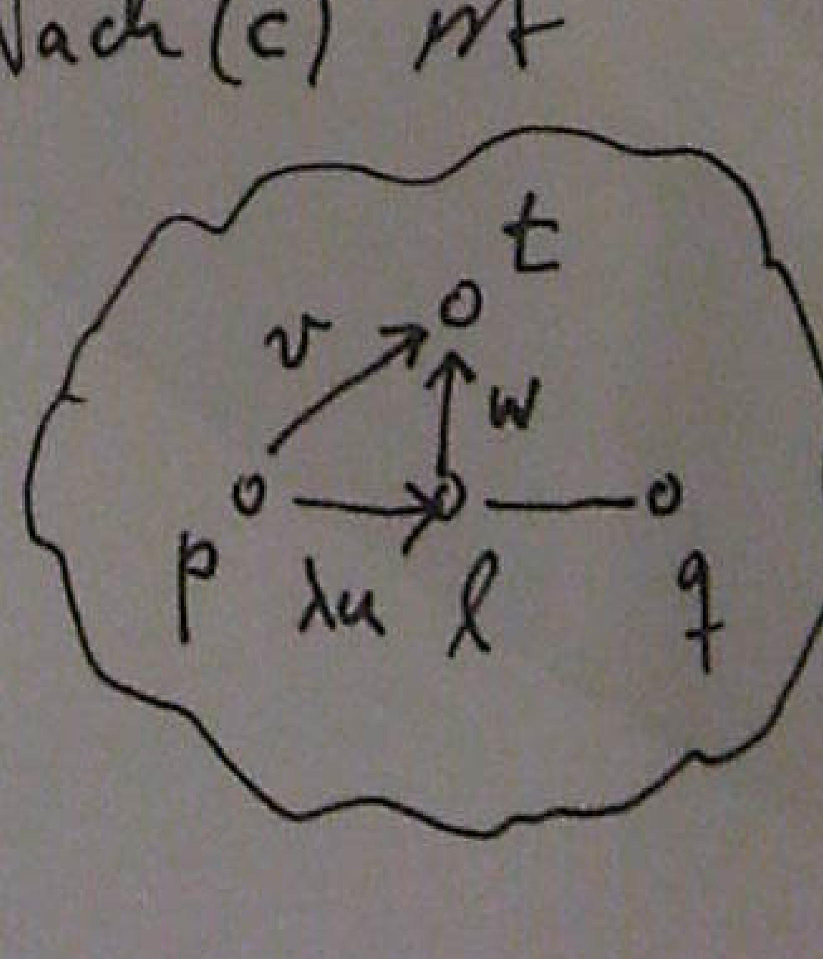
(d) Seien $p, q, t \in \mathbb{R}^N$ mit $p \neq q$. Finde $l \in p \vee q$ (wobei $p \vee q = p + \mathbb{R}\overrightarrow{pq}$ und $\overrightarrow{pq} = -p+q$) mit $\overrightarrow{tl} \perp \overrightarrow{pq}$:




Lösung: Verwende (c) mit $u := \overrightarrow{pq}$, $v := \overrightarrow{pt}$, $w := \overrightarrow{lt}$.

Dann ist $\overrightarrow{tl} \perp \overrightarrow{pq} \iff w \perp u$. Nach (c) ist

$w = v - \lambda u$ mit $\lambda = \dfrac{v*u}{u*u}$.




Also ist $\overrightarrow{pl} = \lambda u$, dh.

$$\boxed{l = p + \lambda u = p + \frac{\overrightarrow{pt} * \overrightarrow{pq}}{\overrightarrow{pq} * \overrightarrow{pq}} \cdot \overrightarrow{pq}}$$

✓