Ü9_H1 "Trigonalisierbar – ja oder nein"

Zeige: Im reellen Matrizenring ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ trigonalisierbar nicht aber $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

H2 "Euklidisches Skalarprodukt: Satz von Pythagoras & Bestimmung von Lotfußpunkten"

Sei I endliche, nichtleere Menge.

(a) Zeige, dass die Abbildung $*: \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x*y$ mit $x*y := \sum_{i \in I} x_i y_i$ bilinear ist und für alle $x, y \in \mathbb{R}^I$ gilt:

(1) $x*y = y*x$

(2) $x*x \geq 0$

(3) $x*x = 0 \iff x = \vec{0}$.

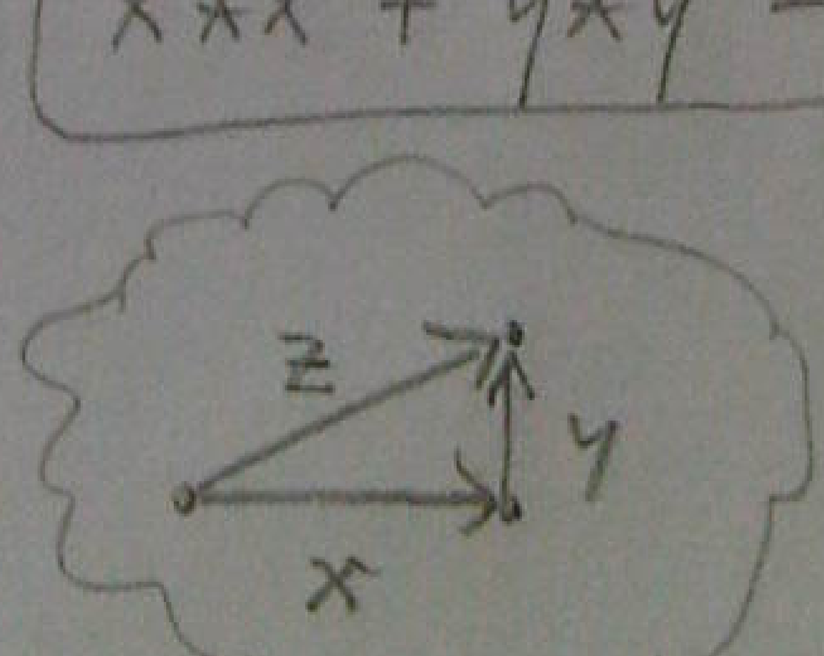
Es heißt $*$ das <u>euklidische Skalarprodukt</u> auf $\mathbb{R}^I$.

Üblich ist auch $\langle x,y \rangle := x*y$ als Notation.

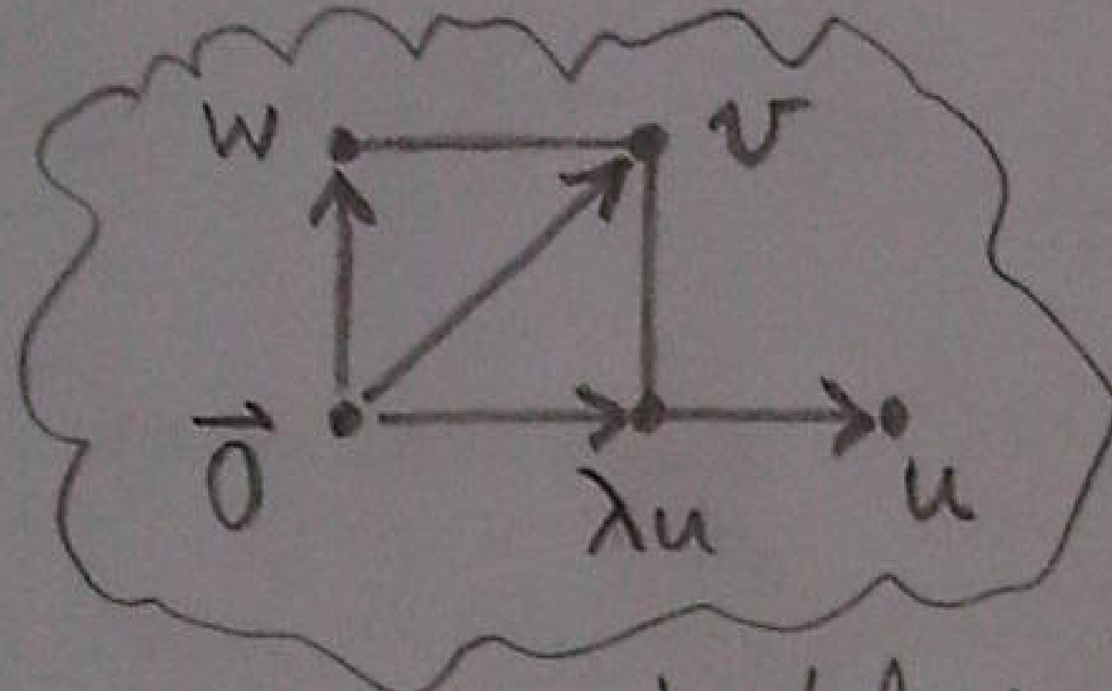
(b) Es ist x <u>senkrecht</u> zu y, kurz $x \perp y$, falls $x*y = 0$ gilt für $x, y \in \mathbb{R}^I$.

Überprüfe den "vektoriellen Satz von Pythagoras" für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^I$ mit $x + y = z$:

$$\boxed{x*x + y*y = z*z \iff x \perp y}$$



H2 (c) Zu $u, v \in \mathbb{R}^I$ mit $u \neq \vec{0}$ finde $w \in \mathbb{R}^I$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $w + \lambda u = v$ und $w \perp u$.



(d) "Bestimmung des Lotfußpunktes":

Für Punkte $p, q \in \mathbb{R}^I$ bezeichnet $\overrightarrow{pq} := -p + q$ den Vektor von p nach q; für $p \neq q$ bildet $p \vee q := p + \mathbb{R}\overrightarrow{pq}$ die Verbindungsgerade von p und q.

Seien nun $p, q, t \in \mathbb{R}^I$ mit $p \neq q$. Bestimme den Lotfußpunkt l von t auf $p \vee q$, d.h. $l \in p \vee q$ mit $\overrightarrow{tl} \perp \overrightarrow{pq}$: