Ü8_H1 "Spatprodukt – Skalarprodukt & Kreuzprodukt"

<u>Einführung</u>: Für jede endliche Menge P und jeden Semiring $\mathbb{S}$ haben wir die <u>Elementarfaltung</u> von $(x,y) \in S^P \times S^P$ erklärt als

$$\boxed{x * y := \sum_{p \in P} xp \cdot yp}$$

Im Fall $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ heißt $\langle x,y \rangle := x * y$ das <u>euklidische Skalarprodukt</u> von x und y im $\mathbb{R}^P$. Gilt $\langle x,y \rangle = 0$, so steht der Vektor x <u>senkrecht</u> auf y, in Zeichen $x \perp y$. Also gilt $x \perp y$ genau dann, wenn $\sum_{p \in P} xp\, yp = 0$ ist.

Für $P = [3]$ ist das <u>Kreuzprodukt</u> von x mit y definiert durch

$$\boxed{x \times y := (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

<u>Zur Aufgabe</u>:

(a) Zeige $x \perp (x \times y)$ und $y \perp (x \times y)$.

(b) Es ist $\det(x,y,z)$ das sogenannte <u>Spatprodukt</u> von $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^3)^3$. Begründe mit der Formel von Leibniz folgende Gleichheit:

$$\boxed{\det(x,y,z) = x * (y \times z)}$$

Ü8_H2 "Bideterminanten"

<u>Vorbereitung</u> Sei $\mathbb{S}$ kommutativer Semiring. Die "Aktuarsalgebra" $A\mathbb{S}$ zu $\mathbb{S}$ sei erklärt als $\mathbb{S}^{\{+,-\}}$ mit folgender $\mathbb{S}$-bilinearen Multiplikation auf $\mathbb{S}^{\{+,-\}}$: $\boxed{\delta_+ \cdot \delta_+ = \delta_+ = \delta_- \cdot \delta_-}$ und $\boxed{\delta_+ \cdot \delta_- = \delta_- = \delta_- \cdot \delta_+}$

Anmerkung: (δ_+, δ_-) ist die Standardbasis von $\mathbb{S}^{\{+,-\}}$, und für $s,t \in S$ interpretiere den Vektor $v = s\delta_+ + t\delta_-$ derart, dass v ein HABEN von s und ein SOLL von t hat. Hierbei ist δ_+ die Grundeinheit für HABEN und δ_- diejenige für SOLL.

Zum Begriff "Bideterminante":

Ist P endliche Menge und $\alpha \in S^{P\times P}$, so sei

$$\boxed{|\alpha|_+ := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}^+ P} \prod_{p\in P} \alpha(p,\sigma p)} \;\&\; \boxed{|\alpha|_- := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}^- P} \prod_{p\in P} \alpha(p,\sigma p)}$$

wobei Sym^+P die Menge der geraden und Sym^-P die Menge der ungeraden Permutationen von P bezeichne.

Dann heisse $|\alpha| := |\alpha|_+\delta_+ + |\alpha|_-\delta_-$ die <u>Bideterminante</u> von α über $A\mathbb{S}$. Setzt man $\boxed{\nu := \delta_+ + \delta_-}$, so existiert zu $\alpha, \beta \in S^{P\times P}$ stets ein $s \in S$ mit:

$$(*) \quad \boxed{|\alpha * \beta| = |\alpha|\cdot|\beta| + s\cdot\nu}$$

"Bideterminanten-Multiplikationssatz"

<u>Zur Aufgabe:</u> Verifiziere $(*)$ für $P = [2]$.

Verwende hierzu $(s_+\delta_+ + s_-\delta_-)\cdot(t_+\delta_+ + t_-\delta_-) = (s_+t_+ + s_-t_-)\delta_+ + (s_+t_- + s_-t_+)\delta_-$ für alle $s_+, s_-, t_+, t_- \in S$.