**Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften**, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Stefan Schmidt

# 8. Übungsblatt zur Vorlesung LAAG II (C):

### Aufgabe C1: "Multilinearität und Ausmultiplizieren"

Die Formel: Gegeben seien endliche Mengen $P$ und $Q$ sowie Moduln $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ über einem kommutativen Semiring $\mathbb{S}$. Ist dann $F : M^P \to M'$ eine bzgl. $P$ multilineare Abbildung von $\mathcal{M}^P$ nach $\mathcal{M}$, so gilt für $\alpha \in S^{P\times Q}$ und $\eta \in M^Q$ stets:

$$(*) \quad \boxed{F(\alpha \star \eta) = \sum_{\sigma\in Q^P} \prod_{p\in P} \alpha(p, \sigma p) \cdot F(\eta \circ \sigma)}$$

Hierbei sei $\alpha \star \eta \in M^P$für alle $p \in P$ definiert durch:

$$\boxed{(\alpha \star \eta)p := \sum_{q\in Q} \alpha(p, q) \cdot \eta q}$$

Erläuterung:

(1) Es ist $F$ multilinear bzgl. $P$, falls $F$ linear ist in jeder Komponente $p$ seiner Faktorenmenge $P$. Formal heißt dies, dass $F \circ \langle\gamma\rangle_p$ lineare Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}'$ ist für jedes $p \in P$ und jedes $\gamma \in M^P$, wobei $\langle\gamma\rangle_p : M \to M^P$ für alle $v \in M$ gegeben sei durch:

$$\boxed{\langle\gamma\rangle_p v : P \to M,\ p' \mapsto \begin{cases} v & \text{für } p' = p \\ \gamma p' & \text{sonst} \end{cases}}$$

(2) Für jedes $p \in P$ ist obiges $(\alpha \star \eta)p$ eine mit $Q$ indizierte Summe (genauer gesagt, die Summe von $Q \to M,\ q \mapsto \alpha(p, q) \cdot \eta q$). Somit kann $F(\alpha \star \eta)$ als verallgemeinertes Produkt aus $P$ Faktoren, dessen jeder Faktor aus $Q$ Summanden besteht, angesehen werden.

Zur Aufgabe:

a) Überprüfe $(*)$ explizit für $P = [3]$ und $Q = [2]$ sowie für $P = [2]$ und $Q = [3]$.

b) Wähle $Q = P$ und spezialisiere $\mathcal{M} = \mathbb{S}^P$ und $\mathcal{M}' = \mathbb{S}^2$.

Für alle $\sigma \in P^P$ sei $F(\delta^P \circ \sigma) = \begin{cases} (1, 0) & \text{falls } \sigma \text{ gerade Permutation von } P \\ (0, 1) & \text{falls } \sigma \text{ ungerade Permutation von } P \\ (0, 0) & \text{sonst} \end{cases}$

Bestimme $F$ mittels $(*)$.