Ü7 P1 "TOR oder KEIN TOR?"

Standpunkt 1 : $p = (-20, 11)$
Blickrichtung 1 : $u = (10, -5)$

Standpunkt 2 : $q = (25, 13)$
Blickrichtung 2 : $w = (-15, -10)$

Gerade 1 : $g = p + \mathbb{R}u$
Gerade 2 : $h = q + \mathbb{R}w$

Position des Balls : b ist unbekannt.
Bestimme b durch $\boxed{\{b\} = g \cap h}$, d.h.
bestimme $\lambda \in \mathbb{R}^2$ mit $\boxed{p + \lambda_1 u = b = q + \lambda_2 w}$
Löse dazu $\boxed{\lambda_1 u - \lambda_2 w = q - p}$ mit $q - p = (25,13) - (-20,11) = (45,2)$

MÖGLICHKEIT 1 "Gauß-Elimination":

$$\boxed{u^T, -w^T, (q-p)^T} = \boxed{\begin{matrix} 10 & 15 & 45 \\ -5 & 10 & 2 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 10 & 15 & 45 \\ -10 & 20 & 4 \end{matrix}} \to$$

$$\to \boxed{\begin{matrix} 10 & 15 & 45 \\ 0 & 35 & 49 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 7 \end{matrix}}. \text{ Also } \boxed{\begin{matrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 9 \\ 5\lambda_2 = 7 \end{matrix}}.$$

D.h. $\lambda_2 = \frac{7}{5}$ und $2\lambda_1 = 3 \cdot (3 - \lambda_2) = 3 \cdot (3 - \frac{7}{5}) = 3 \cdot \frac{8}{5}$, also $\lambda_1 = \frac{12}{5}$.
Somit ist $\lambda = (\frac{12}{5}, \frac{7}{5})$ und $b = p + \lambda_1 u = (-20,11) + 12 \cdot (2,-1) = (4,-1)$,
d.h. $\boxed{b = (4,-1) \in T}$ für $T = [0,5] \times [-2,0]$.

Ergebnis "DER BALL IST IM TOR !!!" ✓

MÖGLICHKEIT 2 "Inverse Matrix":

$\boxed{\lambda * \binom{u}{-w} = q - p}$. $\Rightarrow \lambda = (q-p) * \binom{u}{-w}^{-1} = (45,2) * \begin{pmatrix} 10, & -5 \\ 15, & 10 \end{pmatrix}^{-1}$ und

$\binom{u}{-w}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 3, & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dh $\lambda = (45,2) * \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

also $\lambda = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (45 \cdot 2 - 2 \cdot 3, 45 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (42 \cdot 2, 49) = \frac{1}{5} (12, 7)$

Man erhält $b = p + \lambda_1 u = (4,-1) \in T$. ✓

Lösungen zu

Ü7_P2

Vorbemerkung: $\mathbb{S}$ stark komisch, P endl. Menge, $\gamma, \eta \in S^P$.

Dann: (1) $\sum \gamma \neq 0 \iff \exists_{p\in P} \ \gamma p \neq 0$.

(2) $\gamma * \eta = \sum_{p\in P} \gamma p \cdot \eta p \neq 0 \iff \exists_{p \in P} \gamma p \neq 0 \neq \eta p$.

Zu (a) Seien $\alpha, \beta \in S^{P\times P}$ und $(p,q) \in P\times P$.

Dann • $(p,q) \in \operatorname{supp}(\alpha * \beta) \iff \sum_{t\in P} \alpha(p,t)\beta(t,q) = (\alpha*\beta)(p,q) \neq 0$

$\underset{(2)}{\iff} \exists_{t\in P} \ \alpha(p,t) \neq 0 \neq \beta(t,q) \iff \exists_{t\in P} (p,t) \in \operatorname{supp}\alpha \ \& \ (t,q) \in \operatorname{supp}\beta$

$\iff (p,q) \in (\operatorname{supp}\alpha) * (\operatorname{supp}\beta)$.

Relationen Produkt

• $(p,q) \in \operatorname{supp}(\alpha+\beta) \iff \alpha(p,q) + \beta(p,q) \neq 0 \underset{(1)}{\iff} \alpha(p,q) \neq 0$ oder $\beta(p,q) \neq 0$

$\iff (p,q) \in \operatorname{supp}\alpha \cup \operatorname{supp}\beta$.

Zu (b) Sei $\alpha \in S^{P\times P}$ und $N := N(P, \operatorname{supp}\alpha)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$A(n)$: $\forall p,q \in P$ $\boxed{\boxed{\exists \text{ Pfad der Länge } n \text{ von } p \text{ nach } q \text{ in } N} \iff \alpha^n(p,q) \neq 0}$.

Beweis: $A(1)$ ✓ $\exists$ Pfad der Länge 1 von p nach q in N $\iff (p,q) \in \operatorname{supp}\alpha \iff \alpha(p,q) \neq 0$. ✓

Gelte $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}_+$. Für $p,q \in P$ ist dann $\alpha^{n+1}(p,q) \neq 0$

$\iff \sum_{t\in P} \alpha(p,t) \cdot \alpha^n(t,q) \neq 0 \iff \exists_{t\in P} \alpha(p,t) \neq 0 \ \& \ \alpha^n(t,q) \neq 0$.

$\iff \exists_{t\in P} (p,t) \in \operatorname{supp}\alpha \ \& \ \exists$ Pfad $\vec{e}$ in N der Länge n von t nach q

$\iff \exists$ Pfad der Länge $n+1$ von p nach q in N. ✓

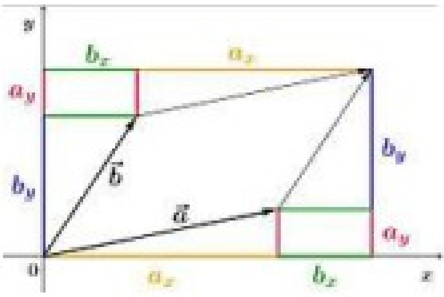
$((p,t), \vec{e})$ Pfad von p nach q der Länge $n+1$.

Zu (c) $S = (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \cdot, 0, 1)$ ist stark komisch.

In H7_C1 ist für a,b aus $\boldsymbol{R}^2$ die Determinante von (a,b) definiert durch

$$det(a,b) := a_1 b_2 - b_1 a_2 .$$

Setzt man $a_x = a_1$ und $a_y = a_2$, so ergibt sich der *gerichtete* Flächeninhalt des Parallelogramms $(O,a,b,a+b)$ elementargeometrisch wie folgt -- siehe zum Beispiel:
http://de.wikipedia.org/wiki/Parallelogramm



$$\begin{aligned} F \qquad & (a_x + b_x)(a_y - b_y) - 2 \cdot (a_x a_y/2 + b_x a_y + b_x b_y/2) \\ & a_x a_y - a_x b_y + b_x a_y + b_x b_y \\ - \; & a_x a_y \qquad\qquad - 2 b_x a_y - b_x b_y \\ & \qquad a_x b_y - b_x a_y \end{aligned}$$

Ü7_C1 liegt obige explizite Definition zugrunde!

(a) folgt aus Rollentausch von x mit y

(b) ergibt sich auch direkt:
$x \mapsto [det(a,x) = x_1(-a_2) + x_2 a_1)]$ ist Linearform -- das ist die von $(-a_2,a_1)$ induzierte lineare Abbildung von $\boldsymbol{R}^2$ nach $\boldsymbol{R}$

(c) ergibt sich elementar-geometrisch wie oben ausgeführt.

(d) ergibt sich auch durch direktes Überprüfen (und mit (a)):

Für $delta_1 = (0,1)$ und $delta_2 = (0,1)$ ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} det(delta_1,delta_1) &= 0 \\ det(delta_1,delta_2) &= 1 \\ det(delta_2,delta_1) &= -1 \\ det(delta_1,delta_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \quad & x_1 y_1 det(delta_1,delta_1) \\ & + x_1 y_2 det(delta_1,delta_2) \\ & + x_2 y_1 det(delta_2,delta_1) \\ & + x_2 y_2 det(delta_2,delta_2) \end{aligned}$$

Lösungen Ü7_H1

Zu H1 (a) $\psi(\varphi x) = (\varphi x \wedge h) \vee p = (\underbrace{[(x\wedge h)\vee q]\wedge h}_{\leq}) \vee p$

$\overset{\text{mod.}}{=} ((x\wedge h)\vee \underbrace{(q\wedge h)}_{0_{\mathbb{L}}})\vee p$

$= \underbrace{(x\wedge h)\vee p}_{\geq} \overset{\text{mod}}{=} x\wedge \underbrace{(h\vee p)}_{1_{\mathbb{L}}} = x$

für alle $x \in [p, 1_{\mathbb{L}}]$.
Also $\psi\circ\varphi = id_{[p,1_{\mathbb{L}}]}$; analog $\varphi\circ\psi = id_{[q,1_{\mathbb{L}}]}$.

Zu (b) $\Phi : \{X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \mid p \in X\} \to \{Y \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \mid q \in Y\}$

$X \longmapsto \pi(q \mid X)$

und

$\Psi : \{Y \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \mid q \in Y\} \to \{X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \mid p \in X\}$

$Y \longmapsto \pi(p \mid Y)$

sind zueinander invers wegen des euklidischen Parallelenpostulats:

$p \in X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \Rightarrow q \in \pi(q\mid X) \parallel X$

$\Rightarrow p \in \pi(p \mid \pi(q\mid X)) \parallel \pi(q\mid X) \parallel X \ni p$

$\Rightarrow \pi(p\mid\pi(q\mid X)) = X$.

d.h. $(\Psi\circ\Phi)X = X$. Analog $\Phi\circ\Psi = id$.

[Alternativ $X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$ mit $p \in X$. $\Rightarrow \exists U \in L\mathcal{M} : X = p + U$
$\Rightarrow \Phi X := q + U$ ... Φ ist Bijektion]

Lösungen Ü7_H2 (a)&(b)

Zu H2(a) $\quad (\psi\circ\varphi)x = \psi(\overbrace{x_1a_1+x_2b_1, x_1a_2+x_2b_2}^{\varphi x})$

$$= (x_1a_1+x_2b_1)\cdot(b_2,-a_2) + (x_1a_2+x_2b_2)\cdot(-b_1,a_1)$$

$$= ((x_1a_1+x_2b_1)b_2 + (x_1a_2+x_2b_2)\cdot(-b_1), (x_1a_1+x_2b_1)(-a_2)+(x_1a_2+x_2b_2)a_1)$$

$$= (x_1(\underbrace{a_1b_2-a_2b_1}_{1=\det(a,b)}) + x_2(\underbrace{b_1b_2-b_2b_1}_{=0}), x_1(\underbrace{-a_1a_2+a_2a_1}_{=0})+x_2(\underbrace{-b_1a_2+b_2a_1}_{1=\det(a,b)}))$$

$= (x_1,x_2) = x$ für alle $x\in\mathbb{R}^2$,

also $\psi\circ\varphi = id_{\mathbb{R}^2}$; analog $\varphi\circ\psi = id_{\mathbb{R}^2}$.

Alternativ $(\psi\circ\varphi)\delta_1^2 = \psi(\varphi\delta_1^2) = \psi a = a_1c+a_2d$

$$= (a_1b_2, -a_1a_2) + (-a_2b_1, a_2a_1)$$

$$= (a_1b_2-a_2b_1, -a_1a_2+a_2a_1)$$

$$= (\det(a,b), 0) = (1,0) = \delta_1^2$$

$$(\psi\circ\varphi)\delta_2^2 = \psi b = b_1c+b_2d = (b_1b_2, -b_1a_2)+(-b_2b_1, b_2a_1)$$

$$= (b_1b_2-b_2b_1, -b_1a_2+b_2a_1) = (0,\det(a,b))$$

$$= (0,1) = \delta_2^2 .$$

Zu (b) $\quad \det(\psi\circ\varphi) = \det((\psi\circ\varphi)\circ\delta^2)$

& $\quad \psi\circ\varphi\circ\delta^2 = (a_1c+a_2d, b_1c+b_2d)$

$$\Rightarrow \det(\psi\circ\varphi) = (a_1c_1+a_2d_1)(b_1c_2+b_2d_2) - (b_1c_1+b_2d_1)(a_1c_2+a_2d_2)$$

$$\det\psi\cdot\det\varphi = (a_1b_2-b_1a_2)(c_1d_2-d_1c_2)$$

Lösungen Ü7 – H2(c) & H3.

Zu H2(c) $\quad \varphi x = x_1 a + x_2 b = (x_1 a_1, 0) + (x_2, x_2 b_2)$

$$= (x_1 a_1 + x_2,\ x_2 b_2)$$

$$1 = \det(a,b) = a_1 b_2 - b_1 a_2 = a_1 b_2 \xRightarrow[S=\mathbb{Z}]{} \boxed{\begin{array}{l} a_1 = b_2 = 1 \text{ oder} \\ a_1 = b_2 = -1 \end{array}}$$

Also ist $\varphi: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$

oder $\varphi: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2,\ x \mapsto (-x_1 + x_2, -x_2)$

Zu H3:

	1 2 3		sgn
id_P	1 2 3	$= ()$	1
σ_1	2 1 3	$= (12)$	-1
σ_2	1 3 2	$= (23)$	-1
$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3$	2 3 1	$= (123)$	1
$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_4$	3 1 2	$= (321)$	1
$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_5$	3 2 1	$= (13)$	-1

$\det(\gamma \circ \sigma) = \det \gamma$ für $\sigma \in \{id_P, \sigma_3, \sigma_4\}$

und $\det(\gamma \circ \sigma) = -\det \gamma$ für $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5\}$.