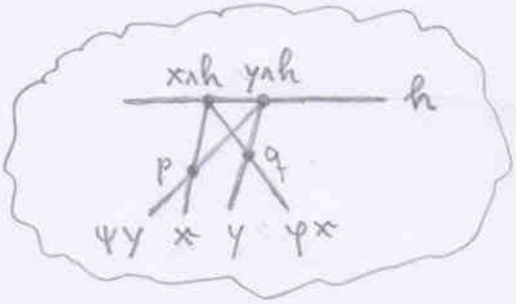
Ü7_H1 "Isomorphie affiner Büschelgeometrien"

(a) Sei $\mathbb{L} = (L, \leq)$ modularer vollständiger Verband und besitze $h \in L$ ein Komplement in $\mathbb{L}$. Für je zwei affine Punkte p und q aus $\mathcal{G} := (\mathbb{L}, h)$ – siehe Ü6_C1 – sind dann

$$\varphi : [p, 1_{\mathbb{L}}] \to [q, 1_{\mathbb{L}}],\ x \mapsto (x \wedge h) \vee q$$

und $$\psi : [q, 1_{\mathbb{L}}] \to [p, 1_{\mathbb{L}}],\ y \mapsto (y \wedge h) \vee p$$

zueinander invers, d.h. $\mathbb{L} | [p, 1_{\mathbb{L}}]$ und $\mathbb{L} | [q, 1_{\mathbb{L}}]$ sind zueinander isomorph. Warum?



(b) Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Ringmodul mit $\mathbb{M} = (M, +, \vec{0})$. Für beliebige $p, q \in M$ bestimme eine Bijektion von $\{X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \mid p \in X\}$ nach $\{Y \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M} \mid q \in Y\}$.

Ü7_H2 "Determinanten im $\mathbb{S}^2$ zu einem Ring $\mathbb{S}$"

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ kommutativer Ring,
Für $a, b \in S^2$ heisse $\det(a,b) := a_1 b_2 - b_1 a_2$
die Determinante von (a,b) über $\mathbb{S}$.
Seien nun $a, b, c, d \in S^2$ und definiere

$$\varphi : S^2 \to S^2,\ x \mapsto x_1 a + x_2 b$$

sowie $\psi : S^2 \to S^2,\ x \mapsto x_1 c + x_2 d$.

(a) Ist $c = (b_2, -a_2)$ und $d = (-b_1, a_1)$, so überprüfe, dass φ und ψ zueinander invers sind, falls $\det(a,b) = 1$ gilt.

(b) Ist f lineare Abbildung des $\mathbb{S}^2$ in sich, so sei $\det f := \det(f \circ \delta^2)$.
Begründe: $\boxed{\det(\psi \circ \varphi) = \det \psi \cdot \det \varphi}$

(c) Für $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$, bestimme φ, falls $\det(a,b) = 1$ und $a_2 = 0$ sowie $b_1 = 1$ gilt.

Ü7_H3 "Determinanten der Permutationen von Vektortripeln im $\mathbb{R}^3$"

Folgere für $P=[3]$ und $\det : (\mathbb{R}^P)^P \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \det\gamma$ aus $\det\gamma = \det(\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3) = -\det(\gamma 2, \gamma 1, \gamma 3) = -\det(\gamma 1, \gamma 3, \gamma 2)$ für alle $\gamma \in (\mathbb{R}^P)^P$, dass

$$\boxed{\det(\gamma \circ \sigma) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \det\gamma}$$

für alle $\gamma \in (\mathbb{R}^P)^P$ und $\sigma \in \operatorname{Sym} P$ gilt.

Erläuterung: $\operatorname{Sym} P$ bezeichne die Menge der Permutationen von P, und $\operatorname{sgn}\sigma$ bezeichnet das Signum von $\sigma \in \operatorname{Sym} P$. Beachte hierbei, dass $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_P) = 1$ und $\operatorname{sgn}\sigma = -1$ für jede Transposition σ (d.h. Vertauschung genau eines Paares) von P ist; außerdem ist $\operatorname{sgn}(\sigma' \circ \sigma) = \operatorname{sgn}\sigma' \cdot \operatorname{sgn}\sigma$ für alle $\sigma, \sigma' \in \operatorname{Sym} P$.