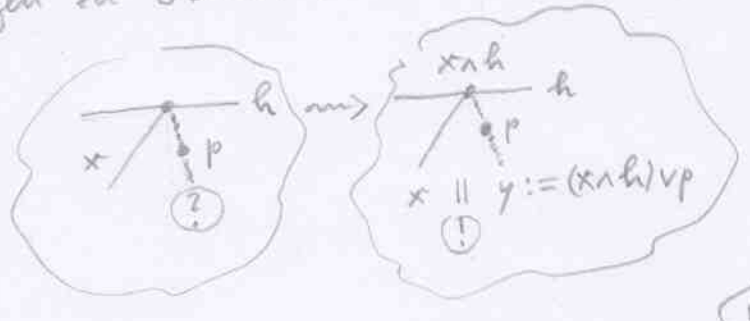
Lösungen zu Ü6_C1 :

Zu (a) 

Existenz: Setze $y := (x\wedge h)\vee p$.

Beh: $y \parallel x$. Begr: $y\wedge h = [\overbrace{(x\wedge h)}^{\le h}\vee p]\wedge h \overset{\text{modular}}{=}$

$= (x\wedge h)\vee\underbrace{(p\wedge h)}_{0_{\mathbb{L}}} = x\wedge h$. ◇

Eindeutigkeit: Sei $y'\parallel x$ mit $p\le y'$.

Dann ist $h\wedge y' = h\wedge x$, also $y' = \underbrace{(p\vee h)}_{1_{\mathbb{L}}}\wedge y' \underset{\substack{\text{modular}\\ \& \, p\le y'}}{=} p\vee(h\wedge y') = p\vee(h\wedge x) = y$. ◇

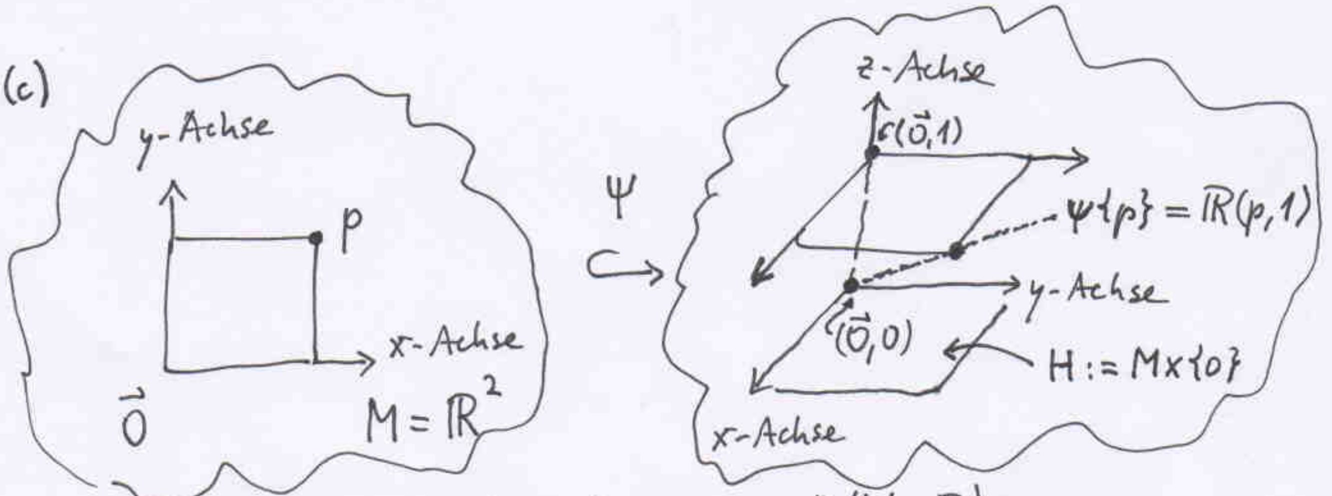
Lösung zu Ü6_C1 (b)

- Sei $X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M}$ mit $X \neq \emptyset$, d.h. es existieren $p \in M$ und $U \in L\mathcal{M}$ mit $X = p + U$.
  Dann ist $X \times \{1\} = (p,1) + U \times \{0\} \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{M}'$,
  und es folgt $\varphi X = \mathrm{span}_{\mathcal{M}'} X \times \{1\} = \mathrm{span}_{\mathcal{M}}((p,1) + U \times \{0\})$
  $= S(p,1) + U \times \{0\}$,
  Insbesondere ist $(\varphi X) + H = S(p,1) + M \times \{0\}$
  $= S(0,1) + M \times \{0\} = M'$,

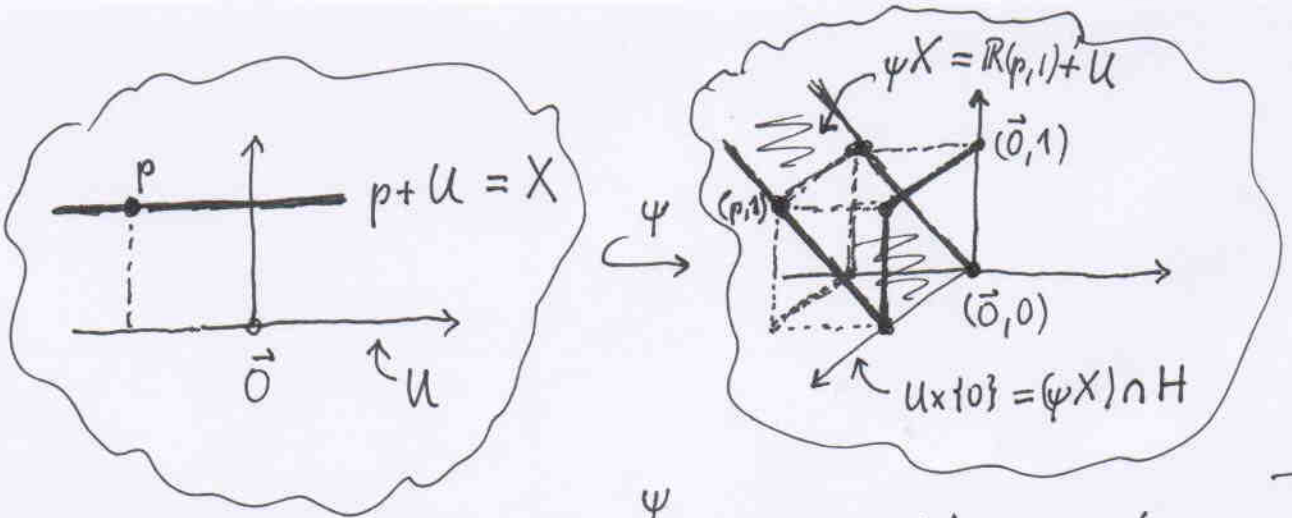
  also $\boxed{\varphi X \in \mathrm{Aff}\,\mathcal{G}}$.
- Sei Y echt affiner Raum in $\mathcal{G}$, d.h. $Y + H = M'$.
  Setze $X := \{x \in M \mid (x,1) \in Y\}$ und $U := \{u \in M \mid (u,0) \in Y\}$.
  Wegen $(\vec{0},1) \in M' = Y + H$ existieren $y \in Y$ und $m \in M$ mit $(\vec{0},1) = y + (m,0)$, d.h. $(-m,1) = y \in Y$, also ist $-m \in X$.
  Ergebnis: $\boxed{X \neq \emptyset}$.
  Sei $p \in X$. Beh $\boxed{X = p + U}$ (natürlich ist $U \in L\mathcal{M}$).
  Begr: "$\subseteq$" $x \in X \Rightarrow (x,1), (p,1) \in Y \Rightarrow u := -p + x \in U$
  (da $(u,0) = -\underbrace{(p,1)}_{\in Y} + \underbrace{(x,1)}_{\in Y} \in Y$) $\Rightarrow x = p + u \in p + U$. ◇
  "$\supseteq$" ✓ $u \in U \Rightarrow p + u \in X$ (da $(p+u,1) = \underbrace{(p,1)}_{\in Y} + \underbrace{(u,0)}_{\in Y} \in Y$). ◇

  $U \times \{0\} = H \cap Y$ ✓ (da $H = M \times \{0\}$). Wegen $S(p,1) + H = M'$ folgt $Y = (S(p,1) + H) \cap Y = S(p,1) + (H \cap Y) = S(p,1) + U \times \{0\} = \varphi X$ (da $X = p + U$). Ergebnis: $\boxed{\varphi X = Y}$. □

Ü6 C1(c)



$\mathrm{Aff}\, M \hookrightarrow \mathbb{L}(M \times \mathbb{R})$



$$\mathrm{Aff}\, \mathcal{M} \xhookrightarrow{\Psi} \mathbb{L}\mathcal{M}' \text{ für } \mathcal{M}' = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$$

für $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$

$$p + U = X \longmapsto \operatorname{span}_{\mathcal{M}'}(X \times \{1\}) = \mathbb{R}(p,1) + U$$

Lösung zu Ü6_H1

$x \in \mathbb{R}^2 \leadsto \psi x = \mathbb{R}(x_1, 0, 1) =: X.$

$\leadsto \pi X = (X + Z) \cap U = \mathbb{R}(0, x_2 - x_1, -x_1, 1) =: X'$

$(x_1, 0, 1) + s(1,1,1,0) = (0, *, *, *)$

$x_1 + s = 0. \leadsto s = -x_1$

$(0, x_2 - x_1, -x_1, 1)$

$\pi' X' = (X' + Z') \cap U = \mathbb{R}(x_1, x_1 + x_2, 0, 1) = \psi(x_1, x_1 + x_2)$

$= \psi(fx)$ für

$fx = (x_1, x_1 + x_2).$

$(0, x_2 - x_1, \underline{-x_1}, 1) + s(1, 2, \underline{1}, 0) = (*, *, 0, *)$

$-x_1 + s = 0. \leadsto s = x_1$

$(x_1, \underbrace{x_2 - x_1 + 2s}_{x_1 + x_2}, 0, 1)$

$\boxed{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ ist Scherung.

ψ injektiv, denn $\psi x = \psi y \Rightarrow \mathbb{R}(x, 0, 1) = \mathbb{R}(y, 0, 1)$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}: (x, 0, 1) = r(y, 0, 1)$

$\Rightarrow r = 1$ (vgl. letzte Kompo.)

$\Rightarrow (x, 0, 1) = (y, 0, 1)$

$\Rightarrow x = y.$

Lösung zu Ü6_H2

zu (a) $\vec{0} \lessdot S\gamma 1 \lessdot S\gamma 1 + S\gamma 2 \lessdot \ldots \lessdot S\gamma 1 + \cdots + S\gamma(n-1) \lessdot M = S\gamma 1 + \cdots + S\gamma n$ ist maximale Kette in $\mathbb{L}\mathcal{M}$, ihre Länge ist n, also folgt $r(\mathbb{L}\mathcal{M}) = n = \dim \mathcal{M}$.

Formaler: $X_j := \operatorname{span}_{\mathcal{M}}(\gamma \mid [j]) = \sum_{i \in [j]} S\gamma i$; dann ist $(X_j)_{j \in \{0,\ldots,n\}}$ maximale Kette der Länge n in $\mathbb{L}\mathcal{M}$.

Zu (b) Es ist $([j])_{j \in \{0,\ldots,n\}}$ maximale Kette der Länge n in 2^P.

Also gilt $r(2^P) = n = \# P$.

Lösung zu Ü6_H3

(a) $x \leq u \Rightarrow (x \vee z) \wedge u \overset{\text{distr.}}{=} (\underbrace{x \wedge u}_{x}) \vee (z \wedge u) = x \vee (z \wedge u)$ ✓

(b) $r_{\mathbb{L}}(x \vee y \vee z) = r_{\mathbb{L}}((x \vee y) \vee z) \underset{(RM)}{=} r_{\mathbb{L}}(x \vee y) + r_{\mathbb{L}} z - r_{\mathbb{L}}(\underbrace{(x \vee y) \wedge z}_{\overset{\text{distr.}}{=} (x \wedge z) \vee (y \wedge z)})$

$r_{\mathbb{L}}((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \underset{(RM)}{=} r_{\mathbb{L}}(x \wedge z) + r_{\mathbb{L}}(y \wedge z) - r_{\mathbb{L}}(\underbrace{(x \wedge z) \wedge (y \wedge z)}_{x \wedge y \wedge z})$. ✓

(c) $\boxed{RD}$ $\#(X \cup Y \cup Z) = \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) - \#(X \cap Z) - \#(Y \cap Z) + \#(X \cap Y \cap Z)$

da $r_{\mathbb{L}} X = r_{\mathbb{L}} 2^X = \# X$ für $\mathbb{L} := 2^P$,

Hier: $\boxed{RD}$ "Prinzip der Inklusion-Exklusion"