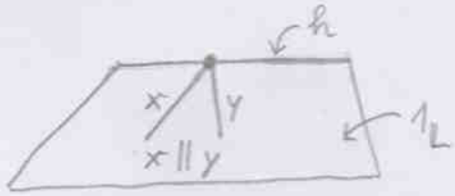
Ü6_C1 "Affine Geometrie aus projektiver Sicht"

Vorbereitung "Affine Geometrie im modularen Verband"

Situation Sei $\mathbb{L}=(L,\leq)$ modularer vollständiger Verband, und besitze $h\in L$ ein Komplement in $\mathbb{L}$. Wir betrachten das "geometrische Setup" $\mathcal{G}:=(\mathbb{L},h)$.

Geometrische Interpretation



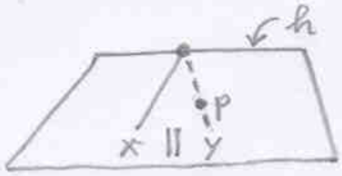
Die Elemente aus L heissen (geometrische) Räume; $0_{\mathbb{L}}$ ist der "leere Raum" (Nullraum) und $1_{\mathbb{L}}$ ist der "ganze Raum" (Einsraum); $x\leq y$ besagt, dass x mit y inzidiert, d.h. x liegt in bzw. auf y.
Ein Raum x ist affin bzgl. $\mathcal{G}$, falls $x\vee h=1_{\mathbb{L}}$ oder $x=0_{\mathbb{L}}$ gilt; ist $x\vee h=1_{\mathbb{L}}$, so ist x ein echter affiner Raum, und ist x Komplement von h in $\mathbb{L}$, so ist x affiner Punkt bzgl. $\mathcal{G}$.
Der Raum h heißt die Fernhyperebene und jedes $t\leq h$ nennen wir Fernraum bzgl. $\mathcal{G}$; ist x affiner Raum, so ist $t=x\wedge h$ der Fernraum zu x bzgl. $\mathcal{G}$.

Ein Paar (x,y) von affinen Räumen ist parallel, in Zeichen $x\parallel y$, falls $x=0_{\mathbb{L}}=y$ oder $x\wedge h=y\wedge h$ und $x\neq 0_{\mathbb{L}}\neq y$ gilt. Somit sind zwei echte affine Räume genau dann parallel, wenn ihre Fernräume gleich sind.

Definition Bezeichnet $\mathrm{Aff}\,\mathcal{G}$ die Menge der affinen Räume bzgl. $\mathcal{G}$, so ist die affine Geometrie zu $\mathcal{G}$ gegeben durch $\boxed{\mathbf{Aff}\,\mathcal{G}:=(\mathrm{Aff}\,\mathcal{G},\leq,\parallel)}$

Ü6_C1 <u>Aufgabe</u> (a) Zeige das euklidische Parallelenpostulat:

Zu jedem echten affinen Raum x und jedem affinen Punkt p existiert genau ein affiner Raum $y \parallel x$ mit $p \leq y$.



(b) Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Ringmodul mit $\mathbb{M} = (M, +, \vec{0})$ und $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$. Für $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \times \mathbb{S}$ betrachte $\mathfrak{h} := (\mathbb{L}, H)$ mit $\mathbb{L} := \mathbb{L}\mathcal{M}'$ und $H := M \times \{0\}$.
Begründe, dass $\mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathcal{M}$ isomorph zu $\mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathfrak{h}$ ist via

$$\boxed{\psi : \mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathcal{M} \to \mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathfrak{h},\ X \mapsto \mathrm{span}_{\mathcal{M}'}(X \times \{1\})}$$

Zeige dazu:

- Für $p \in M$ und $U \in \mathbb{L}\mathcal{M}$ ist $\psi(p+U) = S(p,1) + U \times \{0\}$.
- Für $Y \in \mathbb{L}\mathcal{M}'$ mit $Y + H = M'$ gilt stets $X := \{x \in M \mid (x,1) \in Y\} \in \mathbb{A}\mathrm{ff}\,\mathcal{M}$ mit $\psi X = Y$.
- Für $p, q \in M$ und $U, W \in \mathbb{L}\mathcal{M}$ gilt:
$p + U \parallel q + W \iff U = W \iff \psi(p+U) \parallel \psi(q+W)$

(c) Veranschauliche (b) für $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$. Zeige außerdem für $v = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$, dass $\mathbb{R}v$ echt affin in $\mathfrak{h}$ genau dann, wenn $r_3 \neq 0$ ist. Berechne im Fall $r_3 \neq 0$ den Term $\psi^{-1}(\mathbb{R}v)$.