Ü5 P1(b) Sei (z,u) komplementäres Paar in $\mathbb{L}$ und setze

$L' := \{x \in L \mid x \le u\}$ sowie

$$\varepsilon : L \to L',\ x \mapsto (x \vee z) \wedge u$$

und $\quad \iota : L' \to L,\ x \mapsto x.$

Beh $\varepsilon \circ \iota = id_{L'}$

Begründung Für jedes $x \in L'$ gilt

$$(\varepsilon \circ \iota)x = \varepsilon(\iota x) = \varepsilon x = (x \vee z) \wedge u \underset{\substack{\text{da } x \le u \\ \& \ \mathbb{L} \text{ modular}}}{=} x \vee \underbrace{(z \wedge u)}_{0_{\mathbb{L}}} = x . \checkmark$$

C1(a) Für $z, u \in L$ seien folgende Abbildungen erklärt:

$$\varphi : [z \wedge u, u]_{\mathbb{L}} \to [z, z \vee u]_{\mathbb{L}},\ x \mapsto x \vee z$$

und $\psi : [z, z \vee u]_{\mathbb{L}} \to [z \wedge u, u]_{\mathbb{L}},\ y \mapsto y \wedge u$

Beh1 $\psi(\varphi x) = x$ für alle $x \in [z \wedge u, u]_{\mathbb{L}}$.

Begründung: $\psi(\varphi x) = (x \vee z) \wedge u \underset{\substack{\text{da } x \le u \\ \& \ \mathbb{L} \text{ modular}}}{=} x \vee (z \wedge u) \underset{\text{da } z \wedge u \le x}{=} x . \checkmark$

Beh2 $\varphi(\psi y) = y$ für alle $y \in [z, z \vee u]_{\mathbb{L}}$.

Begründung: $\varphi(\psi y) = (y \wedge u) \vee z \underset{\substack{\text{da } z \le y \\ \& \ \mathbb{L} \text{ modular}}}{=} y \wedge (u \vee z) \underset{\text{da } y \le u \vee z}{=} y . \checkmark$

Ergebnis:

φ und ψ sind zueinander invers. $\checkmark$

Lösungen zu Ü5_H

Zu H1:
- $x \vee z = 1 \Rightarrow (x \vee z) \wedge u = u$
- $z \wedge u = 0 \Rightarrow x \vee (z \wedge u) = x$

$\Big\}$ $(x \vee z) \wedge u < x \vee (z \wedge u)$ obwohl $x < u$.

Zur Erinnerung $\mathbb{L} = (L, \leq)$ modular, falls:
$\forall x, z, u \in L: \; x \leq u \Rightarrow (x \vee z) \wedge u = x \vee (z \wedge u)$.

Zu H2: Sei $x = (x_1, x_2) = x_1\delta_1 + x_2\delta_2 \in \mathbb{R}^2$.

- Dann ist $U \cap E_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{1\} = \mathbb{R} \times \{(0,1)\}$,
  d.h. $U \cap E_1 = \{(r, 0, 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.
  (genauer: $(r,s,t) \in U \Leftrightarrow s = 0$
  $(r,s,t) \in E_1 \Leftrightarrow t = 1$
  also $\boxed{(r,s,t) \in U \cap E_1 \Leftrightarrow s = 0 \wedge t = 1}$ für alle $r,s,t \in \mathbb{R}$).
- Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $Fx + Z = \mathbb{R}(x_1, x_2, 1) + \mathbb{R}(0,1,0)$
  $= \mathbb{R}(x_1, 0, 1) + \mathbb{R}(0,1,0) = \{(r_1 x_1, r_2, r_1) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$.

Also gilt $Gx = ((Fx + Z) \cap U) \cap E_1 = (Fx + Z) \cap (U \cap E_1)$
$= \{(r_1 x_1, r_2, r_1) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \cap \{(r, 0, 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$, d.h.

$\boxed{Gx = \{(x_1, 0, 1)\}}$ (da $(r_1 x_1, r_2, r_1) = (r, 0, 1) \Leftrightarrow$
$r_1 x_1 = r \wedge r_2 = 0 \wedge r_1 = 1 \Leftrightarrow$
$(r_1 x_1, r_2, r_1) = (x_1, 0, 1)$).

Ergebnis: $Gx = \{(\tau \circ \pi')x\}$ wobei $\pi': \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$
Parallelprojektion (in $\mathbb{R}^2$ entlang der y-Achse auf die x-Achse)
und $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, 1)$.