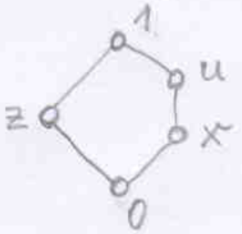
Ü5_H1 "Der kleinste nicht-modulare Verband"

Zeige, dass folgender Verband (gegeben durch sein Hassediagramm) nicht modular ist:



Vergleiche dazu die Terme $(x \vee z) \wedge u$ und $x \vee (z \wedge u)$.

H2 "Projektionen – projektiv und affin"

Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, [3])$ mit der Standardbasis $\delta = \delta^{[3]}$, d.h. $\delta_1 = (1,0,0)$, $\delta_2 = (0,1,0)$ und $\delta_3 = (0,0,1)$.

Für $U := \mathbb{R}\delta_1 + \mathbb{R}\delta_3$ und $Z := \mathbb{R}\delta_2$ sowie $E_1 := \mathbb{R}^2 \times \{1\} = \mathbb{R}\delta_1 + \mathbb{R}\delta_2 + \delta_3$ bestimme zu

$F: \mathbb{R}^2 \to L\mathbb{R}^3,\ x \mapsto \mathbb{R}(x,1)$ und

$\pi: L\mathbb{R}^3 \to L\mathbb{R}^3,\ X \mapsto (X+Z) \cap U$ sowie

$\sigma: L\mathbb{R}^3 \to \mathrm{Aff}\,\mathbb{R}^3,\ X \mapsto X \cap E_1$ die

Abbildungskomposition $G := \sigma \circ \pi \circ F$.

Gib eine Veranschaulichung!

Ü5_H3 "Projektive Einbettung affiner Räume"

Sei $\mathcal{M} = (M, \mathbb{S}, \sigma)$ Ringmodul mit $M = (M, +, \vec{0})$ und $\mathbb{S} := (S, +, \cdot, 0, 1)$. Dann bezeichnet

$$\operatorname{Aff}\mathcal{M} := \{u + W \mid u \in M \wedge W \in L\mathcal{M}\} \cup \{\emptyset\}$$

die Menge der <u>affinen Unterräume</u> von $\mathcal{M}$.

Sei dann $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \times \mathbb{S} := (M \times \mathbb{S}_{add}, \mathbb{S}, \sigma')$ Ringmodul mit der skalaren Multiplikation $\sigma'(s, (m, t)) := (\sigma(s, m), st)$ für alle $s, t \in S$ und $m \in M$.

Für $M_1 := M \times \{1\}$ und $\mathcal{A} := \{X \in \operatorname{Aff}\mathcal{M}' \mid X \subseteq M_1\}$ sowie $\mathcal{L} := \{X \in L\mathcal{M}' \mid X \cap M_1 \neq \emptyset \text{ oder } X = \{(\vec{0}, 0)\}\}$ zeige:

(a) Es ist $\beta : \operatorname{Aff}\mathcal{M} \to \mathcal{A},\ X \mapsto X \times \{1\}$ Bijektion und

(b) Die Abbildungen $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{L},\ X \mapsto \operatorname{span}_{\mathcal{M}'} X$ und $\sigma : \mathcal{L} \to \mathcal{A},\ Y \mapsto Y \cap M_1$ sind zueinander invers.

(c) Aus (a) und (b) folgt, dass die Abbildung

$$\varphi : \operatorname{Aff}\mathcal{M} \to L\mathcal{M}',\ X \mapsto \operatorname{span}_{\mathcal{M}'}(X \times \{1\})$$

injektiv ist; explizit ergibt sich

$$\varphi(u + W) = S \cdot (u, 1) + W \times \{0\}$$

für alle $u \in M$ und $W \in L\mathcal{M}$ – warum?

Gib eine Veranschaulichung für $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$.