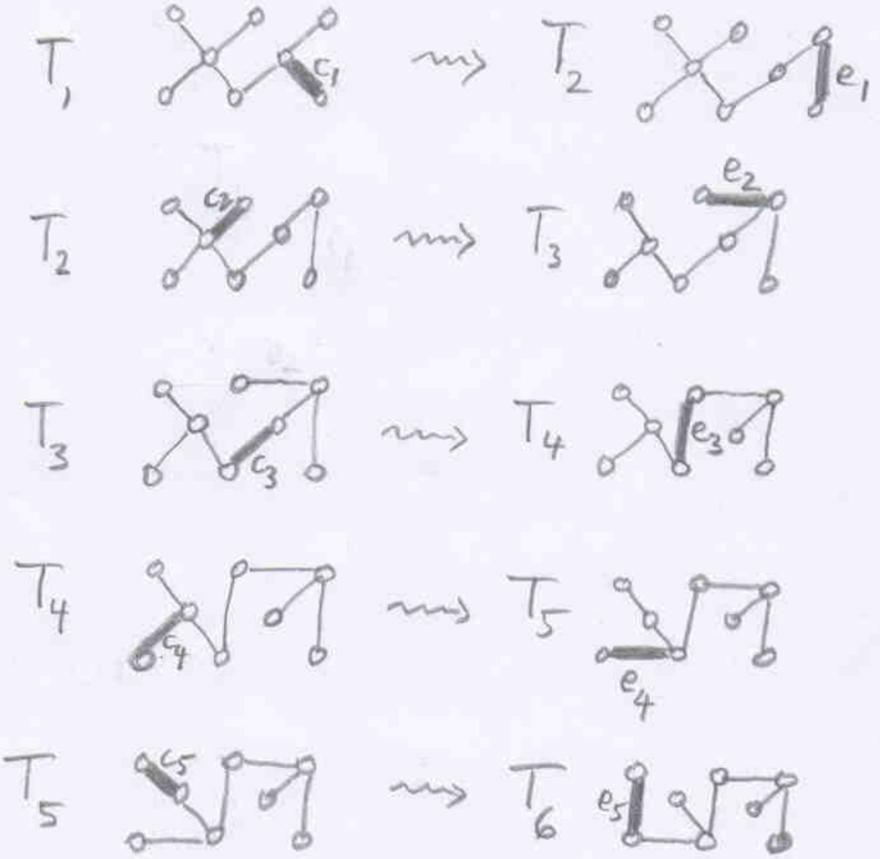
Lösung zu Ü4_P1 (b):



(SG) Ü4 C1 (a) Sei $\gamma \in M^P$ unabhängig in $\mathcal{M}$, d.h. $f_\gamma : S^P \to M$ ist injektiv.
Wegen $\mathrm{span}_{\mathcal{M}} \gamma = \mathrm{Im} f_\gamma$ folgt hieraus bereits:

$$\# \mathrm{span}_{\mathcal{M}} \gamma = \#(S^P) = \# S^{\# P}. \checkmark$$

(b) Sei $\gamma \in M^P$ mit $P = [n]$; setze $\boxed{U_i := \{\lambda \in S^P \mid \mathrm{supp}\, \lambda \subseteq [i]\}}$ und $V_i := \{\lambda * \gamma \mid \lambda \in U_i\}$ d.h. $\boxed{V_i = \mathrm{span}_{\mathcal{M}}(\gamma | [i])}$ für alle $i \in [n]$

(i) Sei γ unabhängig in $\mathcal{M}$, d.h. f_γ ist injektiv.
Angenommen, es gibt ein $i \in P$ mit $\gamma i \in V_{i-1}$.
Dann existiert ein $\lambda \in U_{i-1}$ mit $\gamma i = \lambda * \gamma$; also ist $\delta_i^P * \gamma = \gamma i = \lambda * \gamma$, d.h. $(\delta_i^P, \lambda) \in \ker f_\gamma$ – aber $\delta_i \neq \lambda$ (da $\lambda \in U_{i-1}$ & $\delta_i^P \notin U_{i-1}$), ein Widerspruch zur Injektivität von f_γ.

(ii) Sei $\boxed{\gamma i \notin V_{i-1}}$ für alle $i \in P$. Angenommen, γ ist nicht unabhängig, d.h. f_γ ist nicht injektiv. Wähle dann $i \in P$ <u>minimal</u> mit f_γ ist auf U_i <u>nicht injektiv</u>.
Dann existieren $\lambda, \mu \in U_i$ mit $\lambda \neq \mu$ und $\lambda * \gamma = \mu * \gamma$.
Folglich liegen $\lambda' := \lambda - \lambda_i \delta_i^P$ und $\mu' := \mu - \mu_i \delta_i^P$ in U_{i-1}, und es ist $\boxed{\lambda' * \gamma + \lambda_i \delta_i^P = \mu' * \gamma + \mu_i \delta_i^P}$ (*)

<u>Fall 1</u> $\boxed{\lambda_i = \mu_i}$. Dann ist $\lambda' * \gamma \overset{(*)}{=} \mu' * \gamma$, woraus sofort $\lambda' = \mu'$ folgt (da i <u>minimal</u>); also ist $\lambda = \mu$. $\lightning$

<u>Fall 2</u> $\boxed{\lambda_i \neq \mu_i}$. Dann ist $\gamma i \overset{(*)}{=} \underbrace{(\mu_i - \lambda_i)^{-1}(\lambda' - \mu')}_{\in U_{i-1}} * \gamma \in V_{i-1}$
– ebenfalls ein Widerspruch.

Also ist γ unabhängig in $\mathcal{M}$.

Lsg Ü4 C1 (c) Setze $\mathcal{U}_h := \{\gamma \in M^{[h]} \mid \gamma$ unabhängig in $\mathcal{M}\}$ für $h \in \mathbb{N}$.

Nach (b) ist für $h \in [n]$ stets

$$\mathcal{U}_{h+1} = \{\gamma \in M^{[h+1]} \mid \gamma|[h] \in \mathcal{U}_h \text{ \underline{und} } \gamma(h+1) \notin \operatorname{span}_{\mathcal{M}}(\gamma|[h])\}. \quad (*)$$

Möglichkeiten für $\gamma(h+1)$ sind hier gerade

$$\#(M - \operatorname{span}_{\mathcal{M}}(\gamma|[h])) = \# M - \# \operatorname{span}_{\mathcal{M}}(\gamma|[h])$$
$$\overset{(a)}{=} (\# S)^n - (\# S)^h = q^n - q^h \text{ falls } \gamma \in M^{[h+1]}.$$

Hieraus folgt: $\# \mathcal{U}_{h+1} \overset{(*)}{=} (\# \mathcal{U}_h) \cdot (q^n - q^h)$, d.h.

$$\boxed{u_{h+1} = u_h \cdot (q^n - q^h)} \text{ für } u_h := \# \mathcal{U}_h.$$

Wegen $u_0 = 1$ folgt sofort $u_1 = q^n - 1, \ldots, u_n = (q^n-1) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{n-1})$. ✓

(d) Für $\alpha \in S^{P \times P}$ gilt: α invertierbar, d.h. $\alpha \in GL_P \mathbb{S}$

$\iff f_\alpha = f_{r_\alpha}$ invertierbar, d.h. $f_\alpha = f_{r_\alpha} \in \operatorname{Aut} \operatorname{Mod}(\mathbb{S}, P)$

$\iff r_\alpha$ Basis von $\operatorname{Mod}(\mathbb{S}, P)$. ✓

U4_H1 Sei G ~~ein~~ folgendes ungerichtetes Netzwerk: 

~~Bestimme~~

~~Zu T_1~~ ~~Zu den Basen T_1~~

Finde eine Folge von Basen T_2, T_3, T_4 derart, dass es zu jedem $i \in [5]$ Kanten $c_i \in T_i$ und $e_i \in T_{i+1}$ mit

$$(T_i - \{c_i\}) \cup \{e_i\} = T_{i+1}$$

gibt, wenn T_1 durch  und T_6 durch 

gegeben sind.

T_1 

⇝ T_2 

T_2 

⇝ T_3 

T_3 

⇝ T_4 

T_4 

⇝ T_5 

T_5 

⇝ T_6 

Lösg Ü4_H3

a) $GL(2,2) = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

entspricht

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \leftrightarrow (\,) = id$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \leftrightarrow (12)$ $\boxed{1\ 2\ 3}$

$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \leftrightarrow (23)$

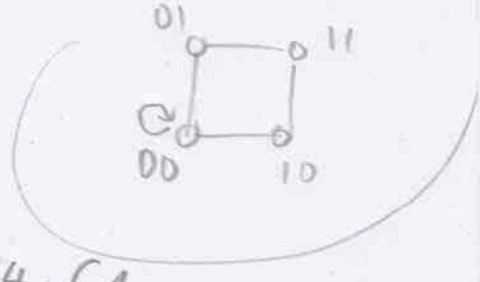
$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \leftrightarrow (13)$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \leftrightarrow (123)$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \leftrightarrow (132)$

"1" := (0,1)
"2" := (1,0)
"3" := (1,1)
"Binärzahldarst"

"also alle Permutationen" — geht auch direkt:



a) $\#GL(2,q) = (q^2-1)\cdot(q^2-q) \overset{q=2}{=} 6$

siehe H4_C1

b) $\#GL(3,q) = (q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2) \overset{q=2}{=} 7\cdot 6\cdot 4 = 168$

$\# \mathbb{F}_q^{3\times 3} = q^{3\times 3} = q^9 \overset{q=2}{=} 2^9 = \boxed{512}$ $\boxed{168 \text{ von } 512}$

c) & d) $\#GL(n,q) = (q^n-1)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{n-1}) \overset{(3,2)}{=} 7\cdot 6\cdot 4 = 168$

$= \#$ geord. Basen

$\dfrac{\#GL(n,q)}{n!} = \#$ ungeord. Basen $\overset{(n,q)=(3,2)}{=} \dfrac{168}{3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 4}{6} = 28$

$\#\binom{\mathbb{F}_q^n - \{\vec{0}\}}{n} = \binom{q^n-1}{n} \overset{(3,2)=(n,q)}{=} \binom{2^3-1}{3} = \binom{7}{3} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$

Die 7 "Nichtbasen" "Geraden"

28 ungeordnete Basen von 35 3-elt. Teilmengen aus $\mathbb{Z}_2^3 - \{\vec{0}\}$ also $\boxed{28 \text{ von } 35}$

Zu Ü4_H3 (c)

Liste (lex. geord)
der 3-Teilmengen von $\mathbb{Z}_2^3 - \{\vec{0}\}$:
– es sind 35:

keine Basis: −
ja, Basis: +

001	010	011	−
…	…	100	+
…	…	101	+
…	…	110	+
…	…	111	+
…	011	100	+
		101	+
…	…	110	+
…	…	111	+
…	100	101	−
…	…	110	+
…	…	111	+
…	101	110	+
…	…	111	−
…	110	111	+
010	011	100	+
		101	+
		110	+
		111	+
	100	101	+
		110	−
		111	+
	101	110	+
		111	+
	110	111	+
011	100	101	+
		110	+
		111	−
	101	110	−
		111	+
	110	111	+
100	101	110	+
		111	+
	110	111	+
101	110	111	+