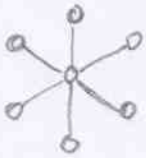
" Basisaustausch im graphischen Matroid "

Ü4_H1 Sei G folgendes ungerichtetes Netzwerk:

Finde eine Folge von Basen T_2, T_3, T_4, T_5 (im zu G gehörigen Matroid) derart, dass es zu jedem $i \in [5]$ Kanten $c_i \in T_i$ und $e_i \in T_{i+1}$ gibt mit $(T_i - \{c_i\}) \cup \{e_i\} = T_{i+1}$, wobei T_1 durch  und T_6 durch 

gegeben seien.

"Endliche Körper und $GL(n,q)$"

Ü4_H2 Eine natürliche Zahl der Form $q = p^k$, wobei p Primzahl und $k \in \mathbb{N}_+$ ist, nennen wir <u>primär</u> bzw. <u>Primärzahl</u>.

Sei $\mathfrak{S} = (S, +, \cdot, 0_{\mathfrak{S}}, 1_{\mathfrak{S}})$ endlicher Körper.
Die <u>Charakteristik</u> von $\mathfrak{S}$ ist definiert als das kleinste $p \in \mathbb{N}_+$ mit $p \cdot 1_{\mathfrak{S}} = 0_{\mathfrak{S}}$ (wobei $\lambda \cdot s := \sum_{i \in [\lambda]} s$ für $\lambda \in \mathbb{N}$ und $s \in S$).

Zeige: Es ist p eine Primzahl, und $\mathfrak{S}$ ist Vektorraum über $\mathbb{Z}_p$ via der skalaren Multiplikation $\sigma: p \times S \to S, (\lambda, s) \mapsto \lambda \cdot s$; insbesondere ist $\#S$ primär.

<u>Mitteilung</u>: (a) Zu jeder Primärzahl q existiert bis auf Isomorphie genau ein q-elementiger Körper, welcher mit $\mathbb{F}_q$ ("the q-element field") bezeichnet wird. Beachte, dass $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ für jede Primzahl p ist.
(b) Die allgemeine lineare Gruppe vom Grad $n \in \mathbb{N}_+$ ist dann gegeben durch $GL(n,q) := GL_n(\mathbb{F}_q)$.

" Vektorräume über $\mathbb{Z}_2$, die $GL(n,2)$ und Basen "

Ü4_H3 Zur Erinnerung: Für jeden Semiring $\mathbb{S}=(S,+,\cdot,0,1)$ und beliebige nichtleere Menge I operiert der Matrizensemiring $\mathrm{Mat}_I \mathbb{S}$ auf $\mathrm{Mod}(\mathbb{S},I)$ von rechts via

$$S^I \times S^{I\times I} \to S^I,\ (\lambda,\alpha) \mapsto \lambda * \alpha$$

vermöge $\lambda * \alpha := \lambda * \tau_\alpha$, d.h. $(\lambda*\alpha)j = \sum_{i\in I} \lambda i \cdot \alpha(i,j)$ für alle $j \in I$.

Der zu α gehörige Endomorphismus von $\mathrm{Mod}(\mathbb{S},I)$ ist dann $f_\alpha := f_{\tau_\alpha}$, d.h. $\lambda * \alpha = \lambda f_\alpha$ für alle $\lambda \in S^I$.

(a) Bestimme $GL(2,2)$ explizit und zeige, dass $GL(2,2)$ als Gruppe aller Permutationen auf $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ operiert.

(b) Vergleiche die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Mat}_3 \mathbb{Z}_2$ (d.h. des Ringes der 3x3-Matrizen über $\mathbb{Z}_2$) mit derjenigen von $GL(2,3)$.

(c) Ist $\mathcal{M}=(\mathbb{M},\mathbb{S},\sigma)$ Semimodul und $\gamma:[n]\to M$ für $n\in\mathbb{N}$ eine Basis von $\mathcal{M}$, so heisse γ eine "geordnete Basis", d.h. $\gamma=(\gamma 1,\dots,\gamma n)$. Die zugehörige "ungeordnete Basis" ist durch $\mathrm{Im}\,\gamma$ gegeben, d.h. durch $\mathrm{Im}\,\gamma=\{\gamma 1,\dots,\gamma n\}$.
Bestimme die 3-elementigen Teilmengen von $\mathbb{Z}_2^3-\{\vec{0}\}$; welche davon sind ungeordnete Basen von $\mathbb{Z}_2^3$?

(d) Für $\mathbb{Z}_2^3 = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_2,[3])$ vergleiche die Anzahl der geordneten mit der Anzahl der ungeordneten Basen.