Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik,

Institut für Algebra, Prof. Dr. Stefan Schmidt

4. Übungsblatt zur Vorlesung LAAG II (C):

Aufgabe C1: "Unabhängige Familien & die allgemeine lineare Gruppe"

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiringmodul mit $\mathbb{M} = (M, +, \overrightarrow{0})$ und $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ und sei P endliche Menge. Begründe:

a)Ist $\mathbb{S}$ endlich (d.h. S ist endlich) und ist $\gamma \in M^P$ unabhängig in $\mathcal{M}$, so gilt: $\boxed{\# span_{\mathcal{M}}\gamma = \# S^{\# P}}$

b)Ist $\mathbb{S}$ Divisionsring und $P = [n]$ mit $n \in \mathbb{N}$, so ist $\gamma \in M^P$ genau dann unabhängig in $\mathcal{M}$, wenn gilt: $\boxed{\forall i \in [n]\ (\gamma i \notin span_{\mathcal{M}}(\gamma \mid [i-1]))}$, d.h.

$$\boxed{\gamma 1 \neq \overrightarrow{0} \wedge \gamma 2 \notin S\gamma 1 \wedge \ \dots\ \wedge \gamma n \notin S\gamma 1 + \ \dots\ + S\gamma(n-1)}$$

c)Sei $\mathbb{S}$ endlicher Körper, setze $q := \# S$. Außerdem sei $\mathcal{M}$ n-dimensional für ein $n \in \mathbb{N}$ (d.h. es existiert eine Basis $\beta \in M^{[n]}$ von $\mathcal{M}$). Ferner sei für alle $h \in \mathbb{N}$ mit $h \leq n$:

$$u_h := \#\{\gamma \in M^{[h]} \mid \gamma \textit{ ist unabhängig in } \mathcal{M}\}$$

.

Dann gilt $u_0 = 1$ und $\boxed{u_{h+1} = (q^n - q^h) \cdot u_h}$ für alle $h \in [n]$,

d.h. $\boxed{u_0 = 1,\ u_1 = q^n - 1,\ \dots,\ u_n = (q^n - 1) \cdot\ \dots\ \cdot (q^n - q^{n-1})}$

Hierbei ist u_n die Anzahl der "geordneten Basen" von $\mathcal{M}$.

d)Bezeichne $GL_P\mathbb{S}$ die Menge der (multiplikativ) invertierbaren Matrizen aus $Mat_P\mathbb{S}$. Es bildet $\mathbb{GL}_P\mathbb{S} := (GL_P\mathbb{S}, \star, I_P)$ eine Gruppe, welche die allgemeine lineare Gruppe zu P über $\mathbb{S}$ heiße.
Für $P = [n]$ setzt man $\mathbb{GL}_n\mathbb{S} := \mathbb{GL}_P\mathbb{S}$.

Es gilt: $\boxed{\forall \alpha \in S^{P \times P} (\alpha \in GL_P\mathbb{S} \Leftrightarrow r_\alpha \textit{ Basis von } Mod(\mathbb{S}, P))}$

In der Situation von c) bestimmt sich daher: $\boxed{\# GL_n\mathbb{S} = (q^n - 1) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1})}$