Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik,

Institut für Algebra, Prof. Dr. Stefan Schmidt

3. Übungsblatt zur Vorlesung LAAG II (P):

Aufgabe P1: "Unterraumverband"

Sei $\mathcal{M} = (, \mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiringmodul mit $\mathbb{M} = (M, +, \vec{0})$.

Dann bezeichne $L\mathcal{M} := \{U \subseteq M \mid$U bildet Unterraum von $\mathcal{M}\}$ und $\mathbb{L}\mathcal{M} := (L\mathcal{M}, \subseteq)$ sei der sogenannte Unterraumverband von $\mathcal{M}$.

1. Anmerkung: Ist $\mathbb{S}$ Divisionsring, so nennt man $\mathbb{L}\mathcal{M}$ auch die zu $\mathcal{M}$ gehörige projektive Geometrie.

a) Zeige für beliebige Menge I und $A \in (L\mathcal{M})^I$, dass $\sum A := \{\sum \alpha \mid \alpha \in M^{(I)} : \forall i \in I(\alpha i \in Ai)\}$ und $\bigcap A := \{m \in M \mid \forall i \in I(m \in Ai)\}$ stets in $L\mathcal{M}$ liegen; begründe überdies:

- $\sum A$ ist das Supremum (d.h. die kleinste obere Schranke) von A in $\mathbb{L}\mathcal{M}$, d.h. es gilt:

$$\boxed{\forall i \in I\,(Ai \subseteq \sum A) \wedge \forall T \in L\mathcal{M}(\forall i \in I(Ai \subseteq T) \Rightarrow \sum A \subseteq T)}$$

- $\bigcap A$ ist das Infimum (d.h. die größte untere Schranke) von A in $\mathbb{L}\mathcal{M}$, d.h. es gilt:

$$\boxed{\forall i \in I\,(\bigcap A \subseteq Ai) \wedge \forall T \in L\mathcal{M}(\forall i \in I\,(T \subseteq Ai) \Rightarrow T \subseteq \bigcap A)}$$

b) Ist $\mathbb{S}$ ein Ring, so überprüfe, dass $\mathbb{L}\mathcal{M}$ modular ist, d.h. es gilt:

$$\forall X, Y, Z \in L\mathcal{M}(X \subseteq Z \Rightarrow (X + Y) \cap Z = X + (Y \cap Z))$$

Veranschauliche dieses grundlegende Gesetz der projektiven Geometrie für $\mathbb{S} = \mathbb{R}$.