Lösung zu Ü3_P1 :

Sei $\mathcal{M}=(M,\mathbb{S},\sigma)$ Semiringmodul mit $M=(M,+,\vec{0})$ und $\mathbb{S}=(S,+,\cdot,0,1)$.
Ferner sei $L\mathcal{M} := \{U\subseteq M \mid U$ bildet Unterraum von $\mathcal{M}\}$ und
$\mathbb{L}\mathcal{M} := (L\mathcal{M}, \subseteq)$ der sogenannte Unterraumverband von $\mathcal{M}$.

Anmerkung: Ist $\mathbb{S}$ Divisionsring, so nennt man $\mathbb{L}\mathcal{M}$ auch die zu $\mathcal{M}$ gehörige projektive Geometrie.

Zu (a) Sei I beliebige Menge und $A\in(L\mathcal{M})^I$.

Beh: $\sum A := \{\sum\alpha \mid \alpha\in M^{(I)} : \forall i\in I(\alpha i\in Ai)\} \in L\mathcal{M}$

Begründung: Seien $u,v\in\sum A$ und $s\in S$. Dann existieren $\alpha,\beta\in M^{(I)}$ mit $\alpha i,\beta i\in Ai$ für alle $i\in I$ derart, dass $u=\sum\alpha$ und $v=\sum\beta$ gilt.
Es folgt $\alpha+\beta\in M^{(I)}$ mit $(\alpha+\beta)i=\alpha i+\beta i\in Ai$ für alle $i\in I$,
also ist $u+v=\sum\alpha+\sum\beta=\sum(\alpha+\beta)\in\sum A$.
Außerdem ist $s\alpha\in M^{(I)}$ mit $(s\alpha)i=s(\alpha i)\in Ai$ für alle $i\in I$
und somit ist $su=s\sum\alpha=\sum s\alpha\in\sum A$. ◇

Beh: $\bigcap A := \{m\in M \mid \forall i\in I(m\in Ai)\}\in L\mathcal{M}$.

Begründung: Seien $u,v\in\bigcap A$ und $s\in S$. Dann ist $u,v\in Ai$ für alle $i\in I$; es folgt $su, u+v\in Ai$ für alle $i\in Ai$.
Ergebnis: $su, u+v\in\bigcap A$. ◇

Beh: $\sum A$ ist das Supremum von A in $\mathbb{L}\mathcal{M}$.

Begründung: Für $j\in I$ und $u\in Aj$ sei $\alpha: I\to M,\ i\mapsto \begin{cases} u & \text{für } i=j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$
Dann ist $\alpha\in M^{(I)}$ mit $\alpha i\in Ai$ für alle $i\in I$ und
also $u=\sum\alpha\in\sum A$. Es folgt $Aj\subseteq\sum A$ für jedes $j\in I$.
Sei andererseits $T\in L\mathcal{M}$ mit $Ai\subseteq T$ für alle $i\in I$.
Ist nun $v\in\sum A$, so existiert ein $\alpha\in M^{(I)}$ mit $\alpha i\in Ai$ für alle $i\in I$ mit $v=\sum\alpha$. Es folgt $\alpha i\in T$ (wegen $Ai\subseteq T$) für alle $i\in I$, woraus sich $v=\sum\alpha\in T$ ergibt. Ergebnis: $\sum A\subseteq T$. ◇

Fortsetzung

Lösung zu Ü3_P1:

Beh: $\bigcap A$ ist das Infimum von A in $\mathbb{L}\mathcal{M}$.

Begründung: Für $u \in \bigcap A$ ist stets $u \in A_i$ für alle $i \in I$, woraus sofort $\bigcap A \subseteq A_i$ für alle $i \in I$ folgt.
Sei andererseits $T \in \mathbb{L}\mathcal{M}$ mit $T \subseteq A_i$ für alle $i \in I$.
Ist nun $v \in T$, so folgt $v \in A_i$ für alle $i \in I$, d.h. $v \in \bigcap A$.
Ergebnis: $T \subseteq \bigcap A$. $\diamond$

Zu (b) Seien $X, Y, Z \in \mathbb{L}\mathcal{M}$ mit $X \subseteq Z$.

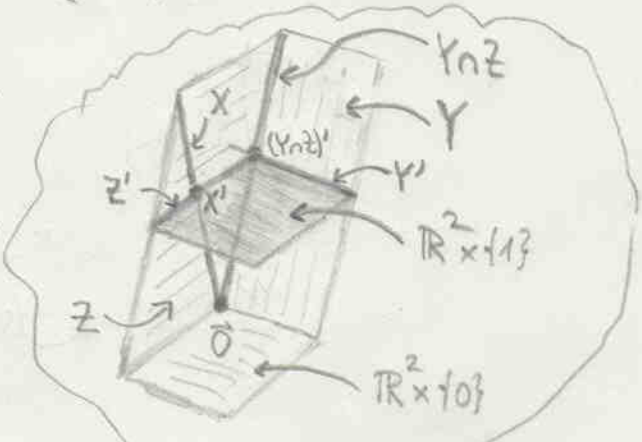
"$\subseteq$": Zu jedem $u \in (X+Y) \cap Z$ existieren $x \in X$ und $y \in Y$ mit $u = x+y$, woraus $y = -x+u \in Z$ folgt, da $-x \in X \subseteq Z$ und $u \in Z$. Also ist $y \in Y \cap Z$ und somit $u = x+y \in X+(Y\cap Z)$. Ergebnis: $(X+Y)\cap Z \subseteq X+(Y\cap Z)$. ✓ ✓

"$\supseteq$": Wegen $X \subseteq X+Y$ und $Y \cap Z \subseteq Z$ ist stets $X+(Y\cap Z) \subseteq (X+Y)\cap Z$.

Gesamtergebnis: $(X+Y)\cap Z = X+(Y\cap Z)$. $\square$

Veranschaulichungen

(1) $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$:
$\mathbb{L}\mathcal{M}$ "proj Ebene"



(2) $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$:
$\mathbb{L}\mathcal{M}$ 3-dim
proj. Geometrie