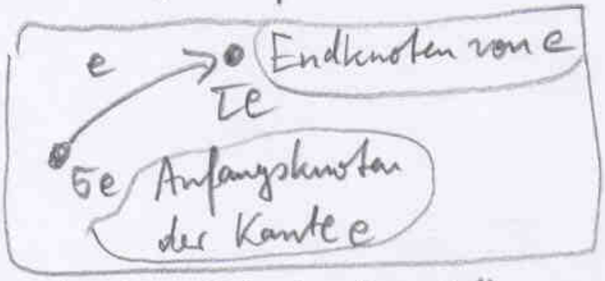
Lösungen zu Übung 2

Zu C1: Vorbemerkung: Ein Netzwerk (gerichteter Multigraph) ist erklärt als Quadrupel $\mathcal{N} = (V, E, \sigma, \tau)$ bestehend aus Mengen E, V und Abbildungen $\sigma, \tau \in V^E$, $\varrho: E \to V \times V$, $e \mapsto (\sigma e, \tau e)$ ist die Strukturabbildung von $\mathcal{N}$.

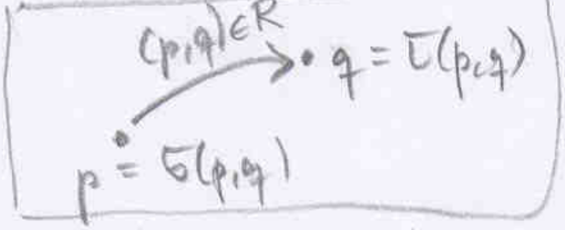
Interpretation: V Knotenmenge, E Kantenmenge, σ "Source map", "τ Target map":



Für $n \in \mathbb{N}_+$ ist $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ ist Pfad der Länge n in $\mathcal{N}$, falls $\tau e_i = \sigma e_{i+1}$ für alle $i \in [n-1]$ gilt.

Bsp $\xrightarrow{e_1}\xrightarrow{e_2}\xrightarrow{e_3}$ ist Pfad der Länge 3.

Ist $\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{R} = (P, R, \pi_1, \pi_2)$ zum binären Relat $\mathcal{R} = (P, R)$ (d.h. P und R sind Mengen mit $R \subseteq P \times P$), wobei $\pi_1: R \to P$, $(p,q) \mapsto p$ und $\pi_2: R \to P$, $(p,q) \mapsto q$.



Dann ist ein Pfad $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)$ in $\mathcal{N}$ beschrieben durch seinen zugehörigen Knotenpfad $(p_0, \dots, p_n) \in P^{n+1}$ mit $p_0 = \sigma e_1$ und $p_i = \tau e_i$ für alle $i \in [n]$.

Also gilt $p_0 R p_1 \dots p_{n-1} R p_n$.

Zur Aufgabe C1: $\chi_R^2(p,q) = \sum_{t\in P} \chi_R(p,t)\cdot\chi_R(t,q)$

$$= \sum_{t\in P\,:\,pRtRq} 1 = \underline{\#\text{Pfade der Länge 2 von } p \text{ nach } q},$$

für beliebige $p,q\in P$.

<u>Allgemein</u>

$$\chi_R^n(p,q) = \sum_{t\in P}\chi_R^{n-1}(p,t)\cdot\chi_R(t,q)$$

$$= \sum_{t\in P\,:\,tRq} \underbrace{\chi_R^{n-1}(p,t)}_{\#\text{Pfade der Länge } n-1 \text{ von } p \text{ nach } t.}$$

$$= \#\text{Pfade der Länge } n \text{ von } p \text{ nach } q.$$

Lösung Ü2 H1:

(a) $\gamma = (\gamma 1, \gamma 2)$ ist unabhängig, da $\gamma 2 \notin \mathbb{R}\gamma 1$.

$U = \langle \gamma \rangle = \mathbb{R}\gamma 1 + \mathbb{R}\gamma 2$.

Aus $\gamma 1 + \gamma 2 = 2\delta_1^P$ und $-\gamma 1 + \gamma 2 = 2\delta_2^P - 2\delta_3^P$

folgt $\delta_1^P = \frac{1}{2}(\gamma 1 + \gamma 2)$, $\delta_2^P - \delta_3^P = \frac{1}{2}(-\gamma 1 + \gamma 2) \in U$,

also ist $U = \mathbb{R}\delta_1^P + \mathbb{R}(\delta_2^P - \delta_3^P)$.

Es folgt $\delta_1^P \in U$ und $\delta_2^P, \delta_3^P \notin U$.

Daher ist sowohl $(\gamma 1, \gamma 2, \delta_2^P)$ als auch $(\gamma 1, \gamma 2, \delta_3^P)$ Basis des $\mathbb{R}^3$, nicht aber $(\gamma 1, \gamma 2, \delta_1^P)$.

(b) $\delta_2^P \overset{\varphi}{\longmapsto} \vec{0}$, $\delta_1^P \overset{\varphi}{\longmapsto} \delta_1^P$, $\delta_3^P \longmapsto -\delta_2^P + \delta_3^P$;

also für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}^P$ ist

$$\lambda \overset{\varphi}{\longmapsto} \lambda_1 \varphi\delta_1^P + \lambda_2 \varphi\delta_2^P + \lambda_3 \varphi\delta_3^P = \lambda_1\delta_1^P + \lambda_3(-\delta_2^P + \delta_3^P), \text{ d.h.}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{\varphi}{\longmapsto} (\lambda_1, -\lambda_3, \lambda_3)$$

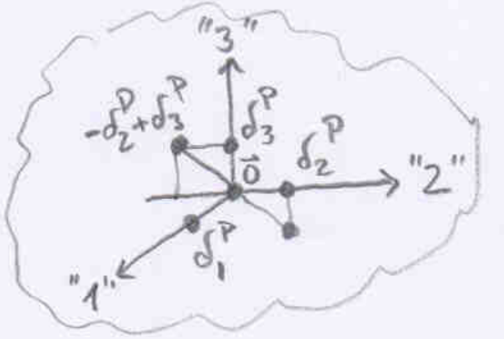
Außerdem:

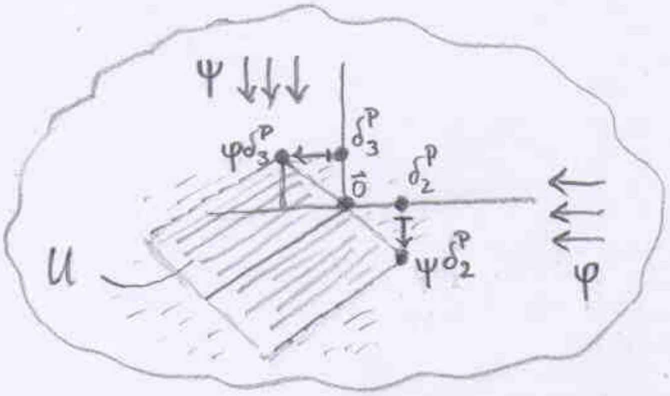
$\delta_3^P \overset{\psi}{\longmapsto} \vec{0}$, $\delta_1^P \overset{\psi}{\longmapsto} \delta_1^P$, $\delta_2^P \overset{\psi}{\longmapsto} \delta_2^P - \delta_3^P$;

also für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}^P$ ist

$$\lambda \overset{\psi}{\longmapsto} \lambda_1 \psi\delta_1^P + \lambda_2 \psi\delta_2^P + \lambda_3 \psi\delta_3^P = \lambda_1\delta_1^P + \lambda_2(\delta_2^P - \delta_3^P), \text{ d.h.}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{\psi}{\longmapsto} (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2)$$





Lösung Ü2 H2:

(a)

$\chi_{\mathcal{R}}$	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	0	1	1	1
p_2	0	0	1	0
p_3	0	0	0	0
p_4	0	0	1	0

$\chi_{\mathcal{R}}^2$	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	0	0	2	0
p_2	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0
p_4	0	0	0	0

(b) $\chi_{\mathcal{R}}^n = 0$ für $n > 2$, da $N\mathcal{R}$ keinen Pfad der Länge größer als 2 besitzt.