

1. Übungsblatt zur Vorlesung LAAG II (P)

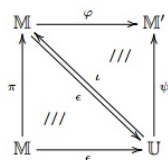
Hinweise: die Übungsinhalte (Präsenzteil) werden in diesem Semester zweigeteilt sein. Der erste Teil (P für Preparation) ist zur Wiederholung und zum Eigenstudium *vor* der Übung gedacht (er wird auch besprochen), der zweite Teil (C für Current) bezieht sich auf aktuelle Vorlesungsthemen und muss nicht vorgearbeitet werden.

Aufgabe 1:

Sei φ Morphismus von einem Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ in ein Monoid \mathbb{M}' . Außerdem sei $U \subseteq M$ eine Transversale von φ , d.h. U bildet ein Untermonoid von \mathbb{M} derart, dass zu jedem $x \in \mathbb{M}$ genau ein $u_x \in U$ mit $\varphi x = \varphi(u_x)$ existiert. Bezeichne weiter \mathbb{U} das durch U induzierte Untermonoid von \mathbb{M} . Für die Abbildungen $\epsilon : M \rightarrow U$, $x \mapsto u_x$ und $\iota : U \rightarrow M$, $u \mapsto u$ sowie $\pi := \iota \circ \epsilon$ und $\psi := \varphi \circ \iota$ ist folgendes zu zeigen:

(a) Es sind ϵ , ι , π und ψ Morphismen von \mathbb{M} nach \mathbb{U} bzw. \mathbb{U} nach \mathbb{M} bzw. \mathbb{M} nach \mathbb{M} bzw. \mathbb{U} nach \mathbb{M}' mit

$\epsilon \circ \iota = id_U$, $\epsilon = \epsilon \circ \pi$, $\pi \circ \pi = \pi$ und $\varphi = \psi \circ \epsilon$, insbesondere erhält man das folgende kommutative Diagramm:



(b) Es ist ψ injektiv mit $Im\psi = Im\varphi$; außerdem gilt $ker\pi = ker\epsilon = ker\varphi$.

(c) Bildet \mathbb{M} eine Gruppe, so bildet \mathbb{U} ebenfalls eine Gruppe. In diesem Fall ist π Projektion von \mathbb{M} mit

$Ker\pi = Ker\varphi$ und $Im\pi = U$; insbesondere ist $U \oplus Ker\varphi = M$ und $U \simeq Im\varphi$.

Aufgabe 2:

Seien P, Q endliche Mengen mit $Q \subseteq P$. Zeigen Sie für einen beliebigen Ring $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$, dass die Abbildung $\varphi : S^P \rightarrow S^P$, $\lambda \mapsto \sum_{q \in Q} \lambda_q \cdot \delta_q^P$ eine Projektion von $Mod(\mathbb{S}, P)$ ist. Bestimmen Sie außerdem $Im\varphi$ und $Ker\varphi$, und überprüfen Sie $Im\varphi \oplus Ker\varphi = S^P$.