Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra, Prof. Dr. Stefan Schmidt

1. Übungsblatt zur Vorlesung LAAG II (P)

<u>**Hinweise:**</u> die Übungsinhalte (Präsenzteil) werden in diesem Semester zweigeteilt sein. Der erste Teil (P für Preparation) ist zur Wiederholung und zum Eigenstudium v*or* der Übung gedacht (er wird auch besprochen), der zweite Teil (C für Current) bezieht sich auf aktuelle Vorlesungsthemen und muss nicht vorgearbeitet werden.

Aufgabe 1:

Sei φ Morphismus von einem Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ in ein Monoid $\mathbb{M}'$. Außerdem sei $U \subseteq M$ eine <u>Transversale</u> von φ, d.h. U bildet ein Untermonoid von $\mathbb{M}$ derart, dass zu jedem $x \in \mathbb{M}$ genau ein $u_x \in U$ mit $\varphi x = \varphi(u_x)$ existiert. Bezeichne weiter $\mathbb{U}$ das durch U induzierte Untermonoid von $\mathbb{M}$. Für die Abbildungen $\epsilon: \ M \to U,\ x \mapsto u_x$ und $\iota: \ U \to M,\ u \mapsto u$ sowie $\pi := \iota \circ \epsilon$ und $\psi := \varphi \circ \iota$ ist folgendes zu zeigen:

(a) Es sind $\epsilon,\ \iota,\ \pi$ und ψ Morphismen von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{U}$ bzw. $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}'$ mit

$\epsilon \circ \iota = id_U,\ \epsilon = \epsilon \circ \pi,\ \pi \circ \pi = \pi$ und $\varphi = \psi \circ \epsilon$, insbesondere erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, shift left, "\epsilon"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "///"] & \mathbb{M}' \\
\mathbb{M} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\epsilon"'] \arrow[ur, phantom, shift left=6, "///"] & \mathbb{U} \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, shift left, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

(b) Es ist ψ injektiv mit $Im\psi = Im\varphi$; außerdem gilt $ker\pi = ker\epsilon = ker\varphi$.

(c) Bildet $\mathbb{M}$ eine Gruppe, so bildet $\mathbb{U}$ ebenfalls eine Gruppe. In diesem Fall ist π Projektion von $\mathbb{M}$ mit

$Ker\pi = Ker\varphi$ und $Im\pi = U$; insbesondere ist $U \oplus Ker\varphi = M$ und $\mathbb{U} \simeq Im\varphi$.

Aufgabe 2:

Seien $P,\ Q$ endliche Mengen mit $Q \subseteq P$. Zeigen Sie für einen beliebigen Ring $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$, dass die Abbildung $\varphi: \ S^P \to S^P,\ \lambda \mapsto \sum_{q \in Q} \lambda_q \cdot \delta_q^P$ eine Projektion von $Mod(\mathbb{S}, P)$ ist. Bestimmen Sie außerdem $Im\varphi$ und $Ker\varphi$, und überprüfen Sie $Im\varphi \oplus Ker\varphi = S^P$.