LAAG SoS 2014

LÖSUNGEN zu Ü1_P&C: Ü1_P1 siehe Vorlesung.

Ü1_P2 Sei $\varepsilon: S^P \to S^Q,\ \lambda \mapsto \lambda | Q$ und $\iota: S^Q \to S^P$ mit

$\iota\lambda: P \to S,\ p \mapsto \begin{cases} \lambda p & \text{für } p \in Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Klar: ε und ι sind lineare Abbildungen: $\mathrm{Mod}(\mathbb{S},P) \underset{\iota}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}(\mathbb{S},Q)$

Dann ist $\varepsilon \circ \iota = id_{S^Q}$, d.h. ε ist Retraktion von ι; also ist $\varphi = \iota \circ \varepsilon$ Projektion von $\mathrm{Mod}(\mathbb{S},P)$ mit

$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\,\iota = \{\lambda \in S^P \mid \mathrm{supp}\,\lambda \subseteq Q\}$ und

$\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\,\varepsilon = \{\lambda \in S^P \mid \mathrm{supp}\,\lambda \subseteq P-Q\}$, folglich ist

$\underline{\mathrm{Im}\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi = S^P}$.

Ü1_C1 Behauptung: $f_\gamma \circ f_\gamma = id_{S^P}$.

Zwei mögliche Begründungen: (1) $f_\gamma \circ \gamma = \delta^P$

(2) $m\gamma * m\gamma = I_P$

Zu(1): $f_\gamma(\gamma 1) = \gamma 1 * \gamma = 1 \cdot \gamma 1 + s \cdot \gamma 2 = (\delta_1^P + s\delta_2^P) + s \cdot (-\delta_2^P) = \delta_1^P$

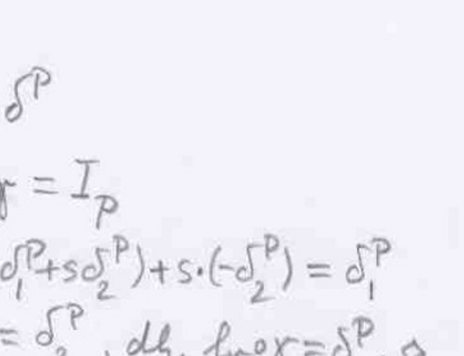
und $f_\gamma(\gamma 2) = \gamma 2 * \gamma = 0 \cdot \gamma 1 + (-1) \cdot \gamma 2 = \delta_2^P$, d.h. $f_\gamma \circ \gamma = \delta^P$. ◇

Zu(2): $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + s \cdot 0 & 1 \cdot s + s \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot s + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $m\gamma * m\gamma = I_P$. ◇

geometrische Veranschaulichung: $f_\gamma \lambda = (\lambda_1, \lambda_1 s - \lambda_2)$ [hier $S^P \equiv S^2$].

$f_\gamma \lambda = \lambda \iff \lambda_1 s - \lambda_2 = \lambda_2 \iff \lambda_1 \cdot s - \lambda_2 \cdot 2 = 0$

Also: f_γ ist Schrägspiegelung an der "Achse" $L(x_1 \cdot s - x_2 \cdot 2 = 0)$.



Ü1_C2 (a) $((u*v)*w)(p,q) = \sum_{h \in H} (u*v)(p,h) \cdot w(h,q)$

$= \sum_{h \in H} \left(\sum_{t \in T} u(p,t) \cdot v(t,h) \right) \cdot w(h,q)$ ✓

$= \sum_{h \in H} \sum_{t \in T} u(p,t) \cdot v(t,h) \cdot w(h,q) = \sum_{(h,t) \in H \times T} u(p,t) \cdot v(t,h) \cdot w(h,q)$

(b) $(p,q) \in \mathrm{supp}(u*w) \Rightarrow \sum_{t \in T} u(p,t) \cdot w(t,q) \neq 0 \Rightarrow \exists_{t \in T}\ u(p,t) \cdot w(t,q) \neq 0 \Rightarrow$ ✓

$\exists_{t \in T}\ u(p,t) \neq 0 \neq w(t,q) \Rightarrow \exists_{t \in T}\ (p,t) \in \mathrm{supp}\,u \wedge (t,q) \in \mathrm{supp}\,w \Rightarrow (p,q) \in \mathrm{supp}\,u * \mathrm{supp}\,w$.

Lsg

Ü1 H1(a) "etwas allgemeiner für Monoide": Sei $\mathbb{M} = (M, \cdot, 1)$ Monoid.
Sei $\varphi \in M$ involutorisch in $\mathbb{M}$, dh. $\varphi^2 = 1$, und sei $\alpha \in M$ invertierbar in $\mathbb{M}$. Beh $\psi := \alpha^{-1}\varphi\alpha$ ist involutorisch in $\mathbb{M}$.
Begründung $\psi^2 = (\alpha^{-1}\varphi\alpha)(\alpha^{-1}\varphi\alpha) = \alpha^{-1}\varphi\underbrace{(\alpha\alpha^{-1})}_{1}\varphi\alpha = \alpha^{-1}\underbrace{\varphi^2}_{1}\alpha = \alpha^{-1}\alpha = 1$ ✓

(b) Sei $\gamma \in P \to \mathbb{R}^P$ für $P = [2]$ def. via $\gamma 1 = \delta_1 + 2\delta_2$ und $\gamma 2 = -\delta_2$.
Für $\varphi := f_\gamma$ ist dann $\varphi\delta_i = \gamma i$ für alle $i \in P$, und somit ist
$\varphi(\delta_1+\delta_2) = \varphi\delta_1 + \varphi\delta_2 = \gamma 1 + \gamma 2 = (\delta_1 + 2\delta_2) - \delta_2 = \delta_1 + \delta_2$.
Für $\lambda \in \mathbb{R}^P$ ist stets $\varphi\lambda = \lambda * \gamma = \lambda_1\gamma 1 + \lambda_2\gamma 2 = \lambda_1\delta_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2)\delta_2$;
folglich ist $\varphi^2\lambda = \varphi(\lambda * \gamma) = \lambda_1\varphi\delta_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2)\varphi\delta_2 = \lambda_1\gamma 1 + (2\lambda_1 - \lambda_2)\gamma 2$
$= \lambda_1\delta_1 + (2\lambda_1 - (2\lambda_1 - \lambda_2))\delta_2 = \lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2 = \lambda$; dh. $\varphi^2 = id_{\mathbb{R}^P}$. ✓

H2(c) Seien $u, w \in S^{P\times P}$. Für alle $(p,q) \in P\times P$ gilt: $(p,q) \in supp(u*w)$
$\Rightarrow \sum_{t\in P} u(p,t)\cdot w(t,q) = (u*w)(p,q) \neq 0 \Rightarrow \exists_{t\in P}\ u(p,t)\cdot w(t,q) \neq 0$
$\Rightarrow \exists_{t\in P}\ u(p,t) \neq 0$ und $w(t,q) \neq 0 \Rightarrow \exists_t\ (p,t) \in supp\, u$ und $(t,q) \in supp\, w$
Relationen Produkt
$\Rightarrow (p,q) \in supp\, u * supp\, w$. Ergebnis: $\boxed{supp(u*w) \subseteq supp\, u * supp\, w}$ ✓

H3(b)
- $O : P\times P \to \mathbb{N}$, $(p,q) \mapsto 0$, also ist $\boxed{supp\, O = \emptyset}$ ✓
- Für alle $(p,q) \in P\times P$ gilt: $I_P(p,q) \neq 0 \Leftrightarrow p = q$.
  Also ist $\boxed{supp\, I_P = \Delta_P}$ für $\Delta_P := \{(p,p) \mid p \in P\}$. ✓
- Für alle $(p,q) \in P\times P$ gilt: $(p,q) \in supp(u+w) \Leftrightarrow \underbrace{u(p,q) + w(p,q)}_{(u+w)(p,q)} \neq 0$
  $\Leftrightarrow u(p,q) \neq 0$ oder $w(p,q) \neq 0 \Leftrightarrow (p,q) \in supp\, u \cup supp\, w$
  $S = \mathbb{N}$ Ergebnis: $\boxed{supp(u+w) = supp\, u \cup supp\, w}$ ✓
- Für alle $(p,q) \in P\times P$ gilt: $(p,q) \in supp(u*w) \Leftrightarrow$
  $\sum_{t\in P} u(p,t)\cdot w(t,q) = (u*w)(p,q) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists_{t\in P}\ u(p,t)\cdot w(t,q) \neq 0$
  $S = \mathbb{N}$
  $\Leftrightarrow \exists_{t\in P}\ u(p,t) \neq 0$ und $w(t,q) \neq 0$
  $S = \mathbb{N}$
  Relationen-Produkt
  $\Leftrightarrow \exists_{t\in P}\ (p,t) \in supp\, u$ und $(t,q) \in supp\, w \Leftrightarrow (p,q) \in supp\, u * supp\, w$.
  Ergebnis: $\boxed{supp(u*w) = supp\, u * supp\, w}$ ✓