TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra, Prof. Dr. Stefan Schmidt

---

1. Übungsblatt zur Vorlesung LAAG II (C&H)

Aufgabe C1:

Sei $P = [2]$ und $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ sei ein Ring. Zeige: f_γ ist für $s \in S$ und $\gamma \in (S^P)^P$ mit $\gamma 1 = \delta_1^P + s \cdot \delta_2^P$ sowie $\gamma 2 = -\delta_2^P$ stets involutorisch, d.h. $f_\gamma \circ f_\gamma = id_{S^P}$. Gib eine geometrische Veranschaulichung.

Aufgabe C2: "Matrizenprodukt direkt"

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring und seien $P,\ T,\ H,\ Q$ endliche nichtleere Mengen. Für $u \in S^{P\times T}$ und $w \in S^{T\times Q}$ ist dann das Matrizenprodukt von u mit$w$ über $\mathbb{S}$ gegeben durch:

$$u \star w :\ P \times Q \to S,\ (p, q) \mapsto \sum_{t\in T} u(p, t) \cdot w(t, q)$$

a) Für beliebige $u \in S^{P\times T}$ und $v \in S^{T\times H}$, sowie $w \in S^{H\times Q}$ zeige durch direktes Nachrechnen:

$$(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$$

b) Sind $X \in 2^{P\times T}$ und $Y \in 2^{T\times Q}$ binäre Relationen, so ist das Relationenprodukt von X mit Y definiert als

$$X \star Y\ := \{(p, q) \in P \times Q \mid \exists t \in T :\ (p, t) \in X\ \wedge (t, q) \in Y)\}$$

Der Support von $u \in S^{P\times T}$ ist gegeben durch:

$$supp\ u\ := \{(p, t) \in P \times T \mid u(p, t) \neq 0\}$$

Für beliebige $u \in S^{P\times T}$ und $w \in S^{T\times Q}$ überprüfe:

$$supp(u \star w) \subseteq supp\, u \star supp\, w$$

Aufgabe H1: "Involution"

Sei $\mathbb{M} = (M, \star, e)$ Monoid. Eine Involution (verallgemeinerte Spiegelung) von $\mathbb{M}$ sei definiert als involutorischer Automorphismus φ von $\mathbb{M}$ (d.h. für alle $x,\ y \in M$ gilt $\varphi(x \star y) = \varphi x \star \varphi y$ und $\varphi e = e$, sowie $\varphi(\varphi x) = x$).

a) Zeige: Ist φ Involution und α Automorphismus von$\mathbb{M}$, so ist auch $\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ eine Involution von $\mathbb{M}$.

b) Für $P = [2]$ finde eine Involution (ungleich der Identität) von $Mod(\mathbb{R}, P)$, die $\delta_1^P + \delta_2^P$ fest lässt.

Zusatzfrage: Wodurch ist für beliebiges von Null verschiedenes λ aus $\mathbb{R}^P$ eine Involution, die λ fest lässt, bestimmt?

Aufgabe H2: "Matrizensemiring"

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring und sei P endliche, nichtleere Menge.

a) Zeige, dass $Mat_P\mathbb{S} := (S^{P\times P}, +, \star, O, I_P)$ mit

und

$u \star w :\ P \times P \to S,\ (p, q) \mapsto \sum_{t\in P} u(p, t) \cdot w(t, q)$ für alle $u, w \in S^{P\times P}$, sowie

$O :\ P \times P \to S,\ (p, q) \mapsto 0$ und

$I_P :\ P \times P \to S,\ (p, q) \mapsto \{ {}^{1\ falls\ p=q}_{0\ sonst}$ einen Semiring bildet, welcher auch als Semiring der $P \times P$-Matritzen über $\mathbb{S}$ bezeichnet wird.

b) Zeige, dass $Mat_P\mathbb{S}$ ein Ring ist, falls $\mathbb{S}$ ein Ring ist; man nennt dann $Mat_P\mathbb{S}$ auch den Ring der $P \times P$-Matrizen über $\mathbb{S}$.

c) Begründe $supp(u + w) \subseteq supp\, u\ \cup\ supp\, w$ und

$supp(u \star w) \subseteq supp\, u\ \star\ supp\, w$ für alle $u,\ w \in S^{P\times P}$

Aufgabe H3: "Relationensemiring"

Sei P eine endliche, nichtleere Menge und bezeichne $\star$ das Relationenprodukt zwischen binären Relationen auf P; ferner bezeichne $\triangle_p := \{(p, p) \mid p \in P\}$ die Diagonale von P.

a) Zeige, dass $Rel_2P := (2^{P\times P}, \cup, \star, \varnothing, \triangle_p)$ ein Semiring, der sogenannte Relationensemiring zu P, ist.

b) Begründe, dass $\Phi :\ Mat_P\mathbb{N} \to Rel_2P,\ u \mapsto supp\, u$ ein Semiringmorphismus ist.

Überprüfe dazu für alle $u, w \in \mathbb{N}^{P\times P}$:

- $supp\ O = \varnothing$ für $O :\ P \times P \to \mathbb{N},\ (p, q) \mapsto 0$
- $supp\ I_P = \triangle_P$
- $supp(u + w) = supp\, u\ \cup\ supp\, w$
- $supp(u \star w) = supp\, u\ \star\ supp\, w$