TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik   Institut fuer Algebra   Prof. Stefan E. Schmidt und S. Reichard

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LAAG I)   WS2013/14

14. Übungsblatt für die Übungen vom 3.2. bis 7.2.2014

Ü1. "Faltungen von Vektorfamilien"

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul.

(a) Für endliche Mengen P und Q betrachte die "Vektorfamilien" $\gamma \in (S^Q)^P$ und $\eta \in M^Q$. Im folgenden Diagramm kommutierender Dreiecke ist die *Faltung* $\gamma * \eta$ von γ mit η definiert:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\gamma * \eta"] & \\
S^P \arrow[r, "f_\gamma"'] & S^Q \arrow[r, "f_\eta"'] & \mathrm{M} \\
 & \mathrm{Q} \arrow[u, "\delta^Q"] \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Leite aus dem Diagramm eine explizite Beschreibung für $\gamma * \eta$ ab und begründe:

$$\boxed{f_{\gamma * \eta} = f_\gamma * f_\eta}$$

Der Stern zwischen f_γ und f_η bezeichnet hier die kovariante Verkettung der Linearkombinations-Abbildungen.

(b) Für endlich Mengen P, T, Q und "Vektorfamilien" $\gamma \in (S^T)^P$, $\eta \in (S^Q)^T$ sowie $\varrho \in M^Q$ verifiziere

$$\boxed{(\gamma * \eta) * \varrho = \gamma * (\eta * \varrho).}$$

Ü2. "Faltung von Datenmatrizen"

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring, und seien P, Q endliche Mengen. Dann definiere den MATRIX-MAKER

$$\mathbf{m} : (S^Q)^P \to S^{P \times Q}$$
$$\gamma \mapsto \mathbf{m}\gamma$$

durch $\mathbf{m}\gamma(p, q) := (\gamma p)q$ für alle $(p, q) \in P \times Q$.

Es folgt $\mathbf{m}(\mathbf{r}_\alpha) = \alpha$ und $\mathbf{r}_{\mathbf{m}\gamma} = \gamma$ für alle $\alpha \in S^{P \times Q}$ und $\gamma \in (S^Q)^P$, wobei $\mathbf{r}_\alpha$ die ROW-MAP zu α bezeichnet.

Sei T weitere Menge. Für $\alpha \in S^{P\times T}$ und $\beta \in S^{T\times Q}$ ist die *Faltung* bzw. das *Matrizenprodukt* definiert durch

$$\boxed{\alpha * \beta := \mathbf{m}(\mathbf{r}_\alpha * \mathbf{r}_\beta)}$$

(a) Überprüfe $\boxed{\mathbf{m}(\gamma * \eta) = \mathbf{m}\gamma * \mathbf{m}\eta}$ für alle $\gamma \in (S^Q)^P$ und $\eta \in (S^T)^Q$.

(b) Begründe folgende Gleichungskette für alle $(p,q) \in P \times Q$:

$$\begin{aligned}(\alpha * \beta)(p,q) &= ((\mathbf{r}_\alpha * \mathbf{r}_\beta)p)q \\ &= (\mathbf{r}_\alpha p * \mathbf{r}_\beta)q \\ &= \sum_{t\in T} \alpha(p,t) \cdot \beta(t,q) \\ &= \mathbf{r}_\alpha p * \mathbf{c}_\beta q\end{aligned}$$

(wobei $\mathbf{c}_\beta q$ die q-te Spalte von β bezeichnet).

(c) Warum ist Matrizenmultiplikation assoziativ?

Ü3. (a) Ausgehend vom reellen Rechenbereich $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ überführe die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

und verifiziere:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet $*$ die in Ü2 beschriebene Matrizenmultiplikation.

(b) Wende 3a an, um das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

zu lösen.