Seite 1

LAAG WiS 2013/14

Übungen Blatt 14

Ü1 "Faltung von Vektorfamilien"

Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ Semiring-Modul.

(a) Für endliche Mengen P und Q betrachte die "Vektorfamilien" $\gamma \in (S^Q)^P$ und $\eta \in M^Q$. Im folgenden Diagramm kommutierender Dreiecke ist die Faltung $\gamma * \eta$ von γ mit η definiert:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\gamma * \eta"] & \\
S^P \arrow[r, "f_\gamma"'] & S^Q \arrow[r, "f_\eta"'] & M \\
 & Q \arrow[u, "\delta^Q"] \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Leite aus dem Diagramm eine explizite Beschreibung für $\gamma * \eta$ ab und begründe:

$$\boxed{f_{\gamma * \eta} = f_\gamma * f_\eta}$$

Der Stern zwischen f_γ und f_η bezeichnet hier die covariante Verkettung der Linearkombinations-Abbildungen.

(b) Für endliche Mengen P, T, Q und "Vektorfamilien" $\gamma \in (S^T)^P$, $\eta \in (S^Q)^T$ sowie $\varrho \in M^Q$ verifiziere:

$$\boxed{(\gamma * \eta) * \varrho = \gamma * (\eta * \varrho)}$$

(Ü2) "Faltung von Datenmatrizen"

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring, und seien P, Q endliche Mengen. Dann definiere den MATRIX-MAKER $\mathbf{m} : (S^Q)^P \to S^{P \times Q}$, $\gamma \mapsto \mathbf{m}\gamma$ durch $\mathbf{m}\gamma(p,q) := (\gamma p) q$ für alle $(p,q) \in P \times Q$.

Es folgt $\mathbf{m}(\mathbf{r}_\alpha) = \alpha$ und $\mathbf{r}_{\mathbf{m}\gamma} = \gamma$ für alle $\alpha \in S^{P \times Q}$ und $\gamma \in (S^Q)^P$, wobei $\mathbf{r}_\alpha$ die ROW-MAP zu α bezeichnet.

Sei T weitere Menge. Für $\alpha \in S^{P \times T}$ und $\beta \in S^{T \times Q}$ ist die Faltung bzw. das Matrizenprodukt bzw. die Matrizenmultiplikation von α mit β definiert durch:

$$\boxed{\alpha * \beta := \mathbf{m}(\mathbf{r}_\alpha * \mathbf{r}_\beta)}$$

(a) Überprüfe $\boxed{\mathbf{m}(\gamma * \eta) = \mathbf{m}\gamma * \mathbf{m}\eta}$ für alle $\gamma \in (S^Q)^P$ und $\eta \in (S^T)^Q$.

(b) Begründe folgende Gleichungskette für alle $(p,q) \in P \times Q$:

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha * \beta)(p,q) &= ((\mathbf{r}_\alpha * \mathbf{r}_\beta) p) q = (\mathbf{r}_\alpha p * \mathbf{r}_\beta) q \\ &= \sum_{t \in T} \alpha(p,t) \cdot \beta(t,q) = \mathbf{r}_\alpha p * \mathbf{c}_\beta q\end{aligned}}$$

(wobei $\mathbf{c}_\beta q$ die q-te Spalte von β bezeichnet).

(c) Warum ist Matrizenmultiplikation assoziativ?

(Ü3) (a) Ausgehend vom reellen Rechenbereich $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ überführe die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ und verifiziere:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Hierbei bezeichnet $*$ die in (Ü2) beschriebene Matrizenmultiplikation.

(b) Wende (a) an, um das Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}}$$

zu lösen.