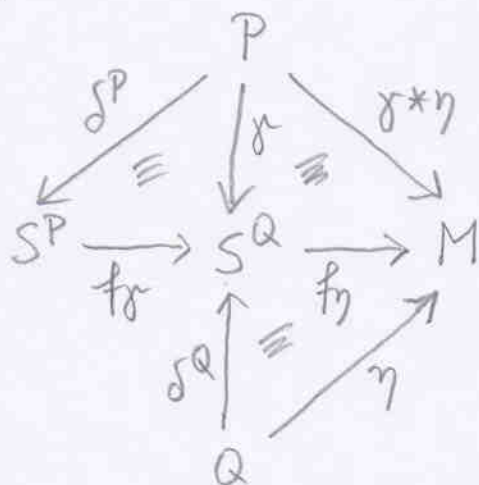


## Ü1 "Faltung von Vektorfamilien"

Sei  $M = (M, \mathcal{S}, \mathcal{G})$  Semiring-Modul.

- (a) Für endliche Mengen  $P$  und  $Q$  betrachte die "Vektorfamilien"  $\gamma \in (\mathcal{S}^Q)^P$  und  $\eta \in M^Q$ . Im folgenden Diagramm kommutierendes Dreiecke ist die Faltung  $\gamma * \eta$  von  $\gamma$  mit  $\eta$  definiert:



Leite aus dem Diagramm eine explizite Beschreibung für  $\gamma * \eta$  ab und begründe:

$$f_{\gamma * \eta} = f_\gamma * f_\eta$$

Der Stern zwischen  $f_\gamma$  und  $f_\eta$  bezeichnet hier die covariante Verkettung der Linearkombinations-Abbildungen.

- (b) Für endliche Mengen  $P, T, Q$  und "Vektorfamilien"  $\gamma \in (\mathcal{S}^T)^P$ ,  $\eta \in (\mathcal{S}^Q)^T$  sowie  $\varrho \in M^Q$  verifiziere:

$$(\gamma * \eta) * \varrho = \gamma * (\eta * \varrho)$$

Ü2 "Faltung von Datenmatrizen"

Sei  $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$  Semiring, und seien  $P, Q$  endliche Mengen. Dann definiere den MATRIX-MAKER  $m: (S^Q)^P \rightarrow S^{P \times Q}$ ,  $\gamma \mapsto m_\gamma$  durch  $m_\gamma(p, q) := (\gamma_p) \cdot q$  für alle  $(p, q) \in P \times Q$ . Es folgt  $m(\tau_\alpha) = \alpha$  und  $\tau_{m_\gamma} = \gamma$  für alle  $\alpha \in S^{P \times Q}$  und  $\gamma \in (S^Q)^P$ , wobei  $\tau_\alpha$  die ROW-MAP zu  $\alpha$  bezeichnet.

Sei  $T$  weitere Menge. Für  $\alpha \in S^{P \times T}$  und  $\beta \in S^{T \times Q}$  ist die Faltung bzw. das Matrizenprodukt bzw. die Matrizenmultiplikation von  $\alpha$  mit  $\beta$  definiert durch:

$$\alpha * \beta := m(\tau_\alpha * \tau_\beta)$$

(a) Überprüfe  $m(\gamma * \eta) = m_\gamma * m_\eta$  für alle  $\gamma \in (S^Q)^P$  und  $\eta \in (S^T)^Q$ .

(b) Begründe folgende Gleichungskette für alle  $(p, q) \in P \times Q$ :

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(p, q) &= ((\tau_\alpha * \tau_\beta)_p) \cdot q = (\tau_\alpha p * \tau_\beta) \cdot q \\ &= \sum_{t \in T} \alpha(p, t) \cdot \beta(t, q) = \tau_\alpha p * \mathbf{c}_\beta q \end{aligned}$$

(wobei  $\mathbf{c}_\beta q$  die  $q$ -te Spalte von  $\beta$  bezeichnet).

(c) Warum ist Matrizenmultiplikation assoziativ?

Ü3 (a) Ausgehend vom reellen Rechenbereich  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot; 0, 1)$

überführe die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  durch

elementare Zeilenumformungen in eine Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$  und verifiziere:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichnet  $*$  die in (Ü2) beschriebene Matrizenmultiplikation.

(b) Wende (a) an, um das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

zu lösen.