Seite L1

Lösungen Blatt 14

Ü1 Zu (a): Die kommutierenden Dreiecke im Diagramm beinhalten:

$$\gamma = f_\gamma \circ \delta^P = \delta^P * f_\gamma$$
$$\eta = f_\eta \circ \delta^P = \delta^P * f_\eta$$
$$\gamma * \eta = f_\eta \circ \gamma = \gamma * f_\eta$$

Daraus folgt: $\gamma * \eta = \gamma * f_\eta = (\delta^P * f_\gamma) * f_\eta = \delta^P * (f_\gamma * f_\eta)$.

Also ist $\delta^P * f_{\gamma*\eta} = \gamma * \eta = \delta^P * (f_\gamma * f_\eta)$, und es folgt: $f_{\gamma*\eta} = f_\gamma * f_\eta$.

Zu (b): Aus (a) folgt: $f_{(\gamma*\eta)*\varrho} = f_{\gamma*\eta} * f_\varrho = (f_\gamma * f_\eta) * f_\varrho = f_\gamma * (f_\eta * f_\varrho) = f_\gamma * f_{\eta*\varrho} = f_{\gamma*(\eta*\varrho)}$, und somit ist $(\gamma*\eta)*\varrho = \gamma*(\eta*\varrho)$ (da aus $f_{\gamma_1} = f_{\gamma_2}$ stets $\gamma_1 = \delta^P * f_{\gamma_1} = \delta^P * f_{\gamma_2} = \gamma_2$ folgt).

Ü2 Zu (a): $\tau_{\alpha*\beta} = \tau_{m(\tau_\alpha * \tau_\beta)} = \tau_\alpha * \tau_\beta$; also ist

$\tau_{m\gamma * m\eta} = \tau_{m\gamma} * \tau_{m\eta} = \gamma * \eta$, d.h. $m\gamma * m\eta = m(\gamma*\eta)$.

Zu (b) $(\alpha*\beta)(p,q) = m(\tau_\alpha * \tau_\beta)(p,q) = ((\tau_\alpha * \tau_\beta)p)q$; wegen $(\gamma*\eta)p = (f_\eta \circ \gamma)p = f_\eta(\gamma p) = \gamma p * \eta$ ist $(\tau_\alpha * \tau_\beta)p = (\tau_\alpha p) * \tau_\beta = \sum_{t\in T} (\tau_\alpha p)t \cdot \tau_\beta t = \sum_{t \in T} \alpha(p,t)\cdot\beta(t,\cdot)$,

und es folgt: $((\tau_\alpha p) * \tau_\beta)q = \sum_{t\in T} \alpha(p,t)\cdot\beta(t,q) = \alpha(p,\cdot) * \beta(\cdot,q) = \tau_\alpha p * c_\beta q$.

Zu (c) Es ist $\tau_{(\alpha_1*\alpha_2)*\alpha_3} \overset{(a)}{=} \tau_{\alpha_1*\alpha_2} * \tau_{\alpha_3} \overset{(a)}{=} (\tau_{\alpha_1} * \tau_{\alpha_2}) * \tau_{\alpha_3}$

$\underset{(Ü1)b}{=} \tau_{\alpha_1} * (\tau_{\alpha_2} * \tau_{\alpha_3}) \underset{(a)}{=} \tau_{\alpha_1} * \tau_{\alpha_2*\alpha_3} \underset{(a)}{=} \tau_{\alpha_1*(\alpha_2*\alpha_3)}$, d.h.

$(\alpha_1*\alpha_2)*\alpha_3 = \alpha_1*(\alpha_2*\alpha_3)$. □

Seite L2

Ü3 Zu (a):

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&0 \\ 1&2&0&0&1&0 \\ 2&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&0&0&1&0 \\ 0&1&2&1&0&0 \\ 2&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&0&0&1&0 \\ 0&1&2&1&0&0 \\ 0&-4&1&0&-2&1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&-4&-2&1&0 \\ 0&1&2&1&0&0 \\ 0&0&9&4&-2&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&-4&-2&1&0 \\ 0&1&2&1&0&0 \\ 0&0&1&4/9&-2/9&1/9 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&-2/9&1/9&4/9 \\ 0&1&0&1/9&4/9&-2/9 \\ 0&0&1&4/9&-2/9&1/9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2/9&1/9&4/9 \\ 1/9&4/9&-2/9 \\ 4/9&-2/9&1/9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0&1&2 \\ 1&2&0 \\ 2&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Zu (b):

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}} \iff \begin{pmatrix} 0&1&2 \\ 1&2&0 \\ 2&0&1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9&1/9&4/9 \\ 1/9&4/9&-2/9 \\ 4/9&-2/9&1/9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\boxed{\begin{aligned} 1/3 + 2 \cdot 1/3 &= 1 \\ 4/3 + 2 \cdot 1/3 &= 2 \\ 2 \cdot 4/3 + 1/3 &= 3 \end{aligned}} \checkmark$$