13. Übungsblatt für die Übungen vom 27.1. bis 31.1.2014

Hausaufgaben bitte bis zum 3.2.2014 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Bezeichne $\mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{M} = \left(\mathrm{End}\,\mathbb{M}, +, \circ, \vec{0}, \mathrm{id}_M\right)$ den (kontravarianten) Endomorphismen-Semiring eines kommutativen Monoids $\mathbb{M} = (M, +, 0)$.
Begründe $\mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{N}_{\mathrm{add}} \cong \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{Z}_{\mathrm{add}} \cong \mathbb{Z}$.

Ü2. Sei $\mathbb{M} = \left(M, +, \vec{0}\right)$ kommutatives Monoid, $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring, $\sigma : S \times M \to M$ Abbildung, und setze $\mathcal{M} := (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$.
Begründe die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(a) Es is $\mathcal{M}$ ein Semiring-Modul, d.h. die ROW-MAP $\mathbf{r}_\sigma$ ist ein Semiring-Morphismus von $\mathbb{S}$ nach $\mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{M}$.

(b) Es gelten in $\mathcal{M}$ für alle $s, s_1, s_2 \in S$ und $x, x_1, x_2 \in M$ folgende Rechenregeln, falls $s \cdot x := \sigma(s, x)$ gesetzt wird:
- $s \cdot (x_1 + x_2) = s \cdot x_1 + s \cdot x_2$
- $(s_1 + s_2) \cdot x = s_1 \cdot x + s_2 \cdot x$
- $(s_1 \cdot s_2) \cdot x = s_1 \cdot (s_2 \cdot x)$
- $0 \cdot x = \vec{0}$ und $s \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $1 \cdot x = x$

Ü3. Seien $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ und $\mathcal{M}' = (\mathbb{M}', \mathbb{S}, \sigma')$ linksseitige Semiring-Moduln.
Zeige für jede Abbildung $\varphi : M \to M'$ die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(a) Es ist φ Morphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{M}'$ mit $\varphi \circ (\mathbf{r}_\sigma s) = (\mathbf{r}_\sigma s) \circ \varphi$ für alle $s \in S$.

(b) Es ist $\varphi \left(\sum \gamma\right) = \sum (\varphi \circ \gamma)$ für jedes $\gamma \in M^I$ mit endlicher Indexmenge I, und $\varphi\sigma\,(s, x) = \sigma'\,(s, \varphi x)$ gilt für alle $s \in S$ und alle $x \in M$.

(c) Es gilt $\varphi\,(\lambda *^\sigma \gamma) = \lambda *^{\sigma'} (\varphi \circ \gamma)$ für alle $\lambda \in S^{(I)}$ und $\gamma \in M^I$ mit beliebiger Indexmenge I — hierbei sei

$$S^{(I)} := \left\{\lambda \in S^I \mid \mathrm{supp}\,\lambda \text{ ist endlich}\right\}$$
$$\mathrm{supp}\,\lambda := \{i \in I \mid \lambda i \neq 0\}$$
$$\lambda *^\sigma \gamma := \sum_{i \in I} \sigma\,(\lambda_i, \gamma_i)\,.$$

Anmerkungen:

(a) Gelten eine und damit sämtliche der genannten Bedingungen, so nennen wir φ eine *lineare Abbildung* von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}'$.

(b) Sind Verwechselungen ausgeschlossen, so setzt man auch $sx := s \cdot x := \sigma(s, x)$ für $s \in S$ und $x \in M$ sowie $\lambda * \gamma := \lambda *^{\sigma} \gamma$ für $\lambda \in S^{(I)}$ und $\gamma \in M^I$.
Bedingung 3c schreibt sich dann wie folgt:

$$\varphi\,(\lambda * \gamma) = \lambda * (\varphi \circ \gamma)$$

bzw.

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda i \cdot \gamma i\right) = \sum_{i \in I} \lambda i \cdot \varphi(\gamma i).$$

Ü4. Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ linksseitiger Semiring-Modul und sei $I = [3]$.

(a) Für $\gamma \in M^I$ bestimme f_γ explizit; im Fall $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ interpretiere für $\lambda = \frac{1}{3}\left(\delta_1^I + \delta_2^I + \delta_3^I\right)$ das Bild $f_\gamma \lambda = \lambda * \gamma$ geometrisch.

(b) Ist $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, I)$, so zeige für $\gamma, \eta \in \left(\mathbb{R}^I\right)^I$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma 1 &= \delta_2^I \\
\gamma 2 &= -2\delta_1^I + 4\delta_2^I \\
\gamma 3 &= \delta_3^I \\
\eta 1 &= 2\delta_1^I - \frac{1}{2}\delta_2^I \\
\eta 2 &= \delta_1^I \\
\eta 3 &= \delta_3^I,
\end{aligned}$$

dass f_γ und f_η zueinander invers sind.
Überprüfe hierzu: $f_\eta \circ \gamma = \delta^I = f_\gamma \circ \eta$

H5. Ist $\mathbb{S}$ Semiring und P Menge, so ist $\mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P) := (\mathbb{S}_{\mathrm{add}}^{(P)}, \mathbb{S}, \sigma)$ mit

$$\begin{aligned}
\sigma : S \times S^{(P)} &\to S^{(P)} \\
(s, x) &\mapsto s \cdot x
\end{aligned}$$

definiert durch

$$\begin{aligned}
s \cdot x : P &\to S \\
p &\mapsto s \cdot xp
\end{aligned}$$

ein (linksseitiger) Semiring-Modul.

Begründe dies durch überprüfen der Rechenregeln aus Ü2(b).

H6. Sei $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, P)$ mit $P = [2]$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{P\times P}$ gegen durch

α	1	2
1	0	1
2	-2	3

und

β	1	2
1	$3/2$	$-1/2$
2	1	0

Ferner sei $\gamma := \mathbf{r}_\alpha$ die ROW-MAP zu α und $\eta := \mathbf{r}_\beta$ die ROW-MAP zu β.

Zeige, dass f_γ und f_η zueinander invers sind (im Kontext von $\mathcal{M}$) durch Herleitung von

$$f_\eta \circ \gamma = \delta^P = f\gamma \circ \eta.$$

H7. Für $p = [3]$ seien $\lambda \in \mathbb{R}^P$ und $\gamma \in (\mathbb{R}^P)^P$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\lambda &= 3\delta_1^P + \delta_2^P + 5\delta_3^P \\
\eta_1 &= \delta_1^P + \delta_2^P + 2\delta_3^P \\
\eta_1 &= \delta_2^P + 3\delta_3^P \\
\eta_1 &= \delta_3^P
\end{aligned}$$

Bestimme $f_\gamma\lambda = \lambda * \gamma$ im Kontext von $\mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P)$ für

(a) $\mathbb{S} = \mathbb{R}$;

(b) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{\mathrm{trop}}$;

(c) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{\mathrm{arc}}$.