LAAG WiS 2013/14

Blatt 13

Ü1 Bezeichne $\mathbb{E}\mathrm{nd}\,\mathbb{M} = (\mathrm{End}\,\mathbb{M}, +, \circ, \vec{0}, \mathrm{id}_M)$ den (kontravarianten) Endomorphismen-Semiring eines kommutativen Monoids $\mathbb{M} = (M, +, 0)$.
Begründe $\mathbb{E}\mathrm{nd}\,\mathbb{N}_{add} \simeq \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}\mathrm{nd}\,\mathbb{Z}_{add} \simeq \mathbb{Z}$.

Ü2 Sei $\mathbb{M} = (M, +, \vec{0})$ kommutatives Monoid, $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ Semiring, $\sigma : S \times M \to M$ Abbildung, und setze $\mathcal{M} := (\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$.
Begründe die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(i) Es ist $\mathcal{M}$ ein Semiring-Modul, d.h. die ROW-MAP r_σ ist ein Semiring-Morphismus von $\mathbb{S}$ nach $\mathbb{E}\mathrm{nd}\,\mathbb{M}$.

(ii) Es gelten in $\mathcal{M}$ für alle $s, s_1, s_2 \in S$ und $x, x_1, x_2 \in M$ folgende Rechenregeln, falls $s \cdot x := \sigma(s, x)$ gesetzt wird:

- $s \cdot (x_1 + x_2) = s \cdot x_1 + s \cdot x_2$
- $(s_1 + s_2) \cdot x = s_1 \cdot x + s_2 \cdot x$
- $s_2 \cdot (s_1 \cdot x) = (s_2 \cdot s_1) \cdot x$
- $0 \cdot x = \vec{0}$ und $s \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $1 \cdot x = x$

Ü3 Seien $\mathcal{M}=(\mathbb{M}, \mathbb{S}, \sigma)$ und $\mathcal{M}'=(\mathbb{M}', \mathbb{S}, \sigma')$ linksseitige Semiring-Moduln.

(a) Zeige für jede Abbildung $\varphi: M \to M'$ die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(i) Es ist φ Morphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{M}'$ mit $\varphi \circ (r_\sigma s) = (r_{\sigma'} s) \circ \varphi$ für alle $s \in S$.

(ii) Es ist $\varphi(\sum \alpha) = \sum(\varphi \circ \alpha)$ für jedes $\alpha \in M^I$ mit endlicher Indexmenge I ~~und~~ $\varphi\sigma(s,x) = \sigma'(s, \varphi x)$ gilt für alle $s \in S$ und alle $x \in M$.

(iii) Es gilt $\varphi(\lambda *^\sigma \gamma) = \lambda *^{\sigma'} (\varphi \circ \gamma)$ für alle $\lambda \in S^{(I)}$ und $\gamma \in M^I$ mit beliebiger Indexmenge I — hierbei sei $S^{(I)} := \{\lambda \in S^I \mid \operatorname{supp}\lambda \text{ ist endlich}\}$, $\operatorname{supp}\lambda := \{i \in I \mid \lambda i \neq 0\}$ und $\lambda *^\sigma \gamma := \sum_{i \in I} \sigma(\lambda i, \gamma i)$.

Anmerkungen (1) Gelten eine und damit sämtliche der genannten Bedingungen, so nennen wir φ eine lineare Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}'$.

(2) Sind Verwechselungen ausgeschlossen, so setzt man auch $sx := s \cdot x := \sigma(s,x)$ für $s \in S$ und $x \in M$ sowie $\lambda * \gamma := \lambda *^\sigma \gamma$ für $\lambda \in S^{(I)}$ und $\gamma \in M^I$.

Bedingung (iii) schreibt sich dann wie folgt:

$$\varphi(\lambda * \gamma) = \lambda * (\varphi \circ \gamma) \text{ bzw.}$$

$$\varphi\Big(\sum_{i \in I} \lambda i \cdot \gamma i\Big) = \sum_{i \in I} \lambda i \cdot \varphi(\gamma i)$$

Seite 3

Ü4 Sei $\mathcal{M} = (M, S, \sigma)$ linksseitiger Semiring-Modul und sei $I = [3]$.

(a) Für $\gamma \in M^I$ bestimme f_γ explizit; im Fall $S = \mathbb{R}$ interpretiere für $\lambda = \frac{1}{3}(\delta_1^I + \delta_2^I + \delta_3^I)$ das Bild $f_\gamma \lambda = \lambda * \gamma$ geometrisch.

(b) Ist $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, I)$, so zeige für $\gamma, \eta \in (\mathbb{R}^I)^I$ mit $\gamma 1 = \delta_2^I$, $\gamma 2 = -2\delta_1^I + 4\delta_2^I$, $\gamma 3 = \delta_3^I$ sowie

$$\eta 1 = 2\delta_1^I - \tfrac{1}{2}\delta_2^I,\ \eta 2 = \delta_1^I,\ \eta 3 = \delta_3^I,$$

dass f_γ und f_η zueinander invers sind.

Überprüfe hierzu: $f_\eta \circ \gamma = \delta^I = f_\gamma \circ \eta$.

(H5) Ist $\mathbb{S}$ Semiring und P Menge, so ist $\mathrm{Mod}(\mathbb{S},P) := (\mathbb{S}_{add}^{(P)}, \mathbb{S}, \sigma)$ mit $\sigma : S \times S^{(P)} \to S^{(P)},\ (s,x) \mapsto s \cdot x$ definiert durch $s \cdot x : P \to S,\ p \mapsto s \cdot xp$ ein (linksseitiger) Semiring-Modul. Begründe dies durch überprüfen der Rechenregeln aus Ü2 (ii).

(H6) Sei $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{R}, P)$ mit $P = [2]$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{P \times P}$ gegeben durch

α	1	2
1	0	1
2	-2	3

und

β	1	2
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	1	0

Ferner sei $\gamma := r_\alpha$ die ROW-MAP zu α und $\eta := r_\beta$ die ROW-MAP zu β. Zeige, dass f_γ und f_η zueinander invers sind (im Kontext von $\mathcal{M}$) durch Herleitung von $f_\eta \circ \gamma = \delta^P = f_\gamma \circ \eta$.

(H7) Für $P = [3]$ seien $\lambda \in \mathbb{R}^P$ und $\gamma \in (\mathbb{R}^P)^P$ gegeben durch $\lambda = 3\delta_1^P + \delta_2^P + 5\delta_3^P = (3, \tilde{1}, 5)$ und $\gamma 1 = \delta_1^P + \delta_2^P + 2\delta_3^P = (\tilde{1}, \tilde{1}, 2)$, $\gamma 2 = \delta_2^P + 3\delta_3^P = (\tilde{0}, \tilde{1}, 3)$ sowie $\gamma 3 = \delta_3^P = (\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1})$.
Bestimme $f_\gamma \lambda = \lambda * \gamma$ im Kontext von $\mathrm{Mod}(\mathbb{S}, P)$ für
(i) $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ (ii) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{trop}$ (iii) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{arc}$.