Seite L1

Ü1 (1) Zunächst zeigen wir, dass $\Psi : \mathrm{End}(\mathbb{N}_{add}) \to \mathbb{N}, \varphi \mapsto \varphi 1$ ein Semiring-Isomorphismus ist:

(i) Für $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{N}_{add})$ ist $\varphi x = \varphi(\sum_{i\in[x]} 1) = \sum_{i\in[x]} \varphi 1 = (\varphi 1)\cdot x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

(ii) Ψ ist Semiring-Morphismus.
Denn: Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{N}_{add})$, so ist $(\varphi_1+\varphi_2)1 = \varphi_1 1 + \varphi_2 1$ und $(\varphi_2 \circ \varphi_1)1 = \varphi_2(\varphi_1 1) \underset{(i)}{=} (\varphi_2 1)\cdot(\varphi_1 1)$; außerdem ist $\vec{0}1 = 0$ (wobei $\vec{0}$ die Nullabbildung auf $\mathbb{N}$ bezeichne) und $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} 1 = 1$. ◇

(iii) Ψ ist bijektiv:
Denn: • Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{N}_{add})$ mit $\varphi_1 1 = \varphi_2 1$, so folgt $\varphi_1 x \underset{(i)}{=} (\varphi_1 1)\cdot x = (\varphi_2 1)\cdot x \underset{(i)}{=} \varphi_2 x$ für alle $x \in \mathbb{N}$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2$.
Also ist Ψ injektiv.
• Zu $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto n\cdot x$ aus $\mathrm{End}(\mathbb{N}_{add})$ mit $\varphi 1 = n \cdot 1 = n$.
Also ist Ψ surjektiv. □

(2) Analog zu (1) ist $\Psi : \mathrm{End}(\mathbb{Z}_{add}) \to \mathbb{Z}, \varphi \mapsto \varphi 1$ ein Semiring-Isomorphismus, da für jedes $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}_{add})$ gilt: $\varphi x = (\varphi 1)\cdot x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ (denn nach (1i) ist $\varphi x = (\varphi 1)\cdot x$ für $x \geq 0$ und $\varphi x = -\varphi(-x) = -(\varphi 1)\cdot(-x) = (\varphi 1)\cdot x$ für $x < 0$). □

Seite L2 Ü2 τ_σ ist Semiring-Morphismus von S nach End $\mathbb{M}$ bedeutet:

(1) Für beliebiges $s \in S$ ist $\tau_\sigma s = \sigma(s,\cdot) \in \operatorname{End} M$, d.h., für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt $\sigma(s, x_1+x_2) = \sigma(s,x_1)+\sigma(s,x_2)$, d.h., $\boxed{s\cdot(x_1+x_2) = s\cdot x_1 + s\cdot x_2}$, und es ist $\sigma(s,\vec{0}) = (\tau_\sigma s)\vec{0} = \vec{0}$, d.h., $\boxed{s\cdot\vec{0} = \vec{0}}$.

(2) Für beliebige $s_1, s_2 \in S$ ist $\tau_\sigma(s_1+s_2) = \tau_\sigma(s_1) + \tau_\sigma(s_2)$ und $\tau_\sigma 0 \equiv \vec{0}$ sowie $\tau_\sigma(s_2\cdot s_1) = \tau_\sigma(s_2)\circ\tau_\sigma(s_1)$ und $\tau_\sigma 1 = id_M$, d.h., für alle $x \in M$ gilt:
$\sigma(s_1+s_2, x) = \sigma(s_1,x) + \sigma(s_2,x)$ und $\sigma(0,x) = \vec{0}$ sowie
$\sigma(s_2\cdot s_1, x) = \sigma(s_2, \sigma(s_1,x))$ und $\sigma(1,x) = x$, d.h.,
$\boxed{(s_1+s_2)\cdot x = s_1\cdot x + s_2\cdot x}$ und $\boxed{0\cdot x = \vec{0}}$ sowie
$\boxed{(s_2\cdot s_1)\cdot x = s_2\cdot(s_1\cdot x)}$ und $\boxed{1\cdot x = x}$.

Aus (1) und (2) folgt direkt die Äquivalenz von (i) und (ii). □

Seite L3

(Ü3) Zur Äquivalenz von (i) und (ii) zeigen wir (1) und (2):

(1) $\boxed{\varphi \text{ ist Morphismus von } \mathbb{M} \text{ nach } \mathbb{M}'} \Leftrightarrow \boxed{\varphi(\Sigma\gamma) = \Sigma(\varphi\circ\gamma) \text{ für jedes } \gamma\in M^I \text{ mit endlicher Indexmenge } I.}$

Begründung: "$\Rightarrow$" Induktion nach $\#I$.

Induktionsanfang • $\#I=0$, d.h., $\gamma=(\emptyset\to M)$. Dann ist $\varphi\circ\gamma=(\emptyset\to M')$, also gilt $\Sigma\gamma=\vec{0}$ und $\Sigma(\varphi\circ\gamma)=\vec{0}'$; es folgt $\varphi(\Sigma\gamma)=\varphi\vec{0}=\vec{0}'=\Sigma(\varphi\circ\gamma)$.

• $\#I=1$, d.h. $I=\{i\}$. Dann ist $\Sigma\gamma=\gamma i$ und $\Sigma(\varphi\circ\gamma)=(\varphi\circ\gamma)i$; es folgt $\varphi(\Sigma\gamma)=\varphi(\gamma i)=(\varphi\circ\gamma)i=\Sigma(\varphi\circ\gamma)$. ◇

Induktionsschritt: Sei $\#I>1$. Wähle $i_0\in I$ und setze $I_0=\{i_0\}$ sowie $I_1=I-I_0$. Nach Induktionsannahme ist dann $\varphi(\Sigma\gamma)=\varphi(\Sigma\gamma|I_0+\Sigma\gamma|I_1)=\varphi(\Sigma\gamma|I_0)+\varphi(\Sigma\gamma|I_1)$ $\overset{(IA)}{=} \Sigma\varphi\circ(\gamma|I_0)+\Sigma\varphi\circ(\gamma|I_1)=\Sigma(\varphi\circ\gamma)|I_0+\Sigma(\varphi\circ\gamma)|I_1=\Sigma(\varphi\circ\gamma)$. ◇

"$\Leftarrow$" • $\varphi\vec{0}=\varphi\Sigma(\emptyset\to M)=\Sigma\varphi\circ(\emptyset\to M)=\Sigma(\emptyset\to M')=\vec{0}'$.

• Zu $x_1,x_2\in M$ wähle $\gamma:[2]\to M, i\mapsto x_i$. Dann ist $\Sigma\gamma=x_1+x_2$, also gilt: $\varphi(x_1+x_2)=\varphi(\Sigma\gamma)=\Sigma(\varphi\circ\gamma)=(\varphi\circ\gamma)1+(\varphi\circ\gamma)2=\varphi x_1+\varphi x_2$. ◇

(2) Für alle $s\in S$ gilt: $\boxed{\varphi\circ(r_\sigma s)=(r_{\sigma'} s)\circ\varphi} \Leftrightarrow \boxed{\forall x\in M(\varphi\sigma(s,x)=\sigma'(s,\varphi x))}$

Begründung: $\varphi\circ(r_\sigma s)=(r_{\sigma'} s)\circ\varphi \Leftrightarrow \forall x\in M\big(\varphi((r_\sigma s)x)=(r_{\sigma'} s)(\varphi x)\big) \Leftrightarrow$ $\forall x\in M(\varphi\sigma(s,x)=\sigma'(s,\varphi x))$. ◇

Aus (1) und (2) ergibt sich direkt: (i) $\Leftrightarrow$ (ii). ◇

(3) Es gilt: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Begründung: "$\Rightarrow$" Sei I Menge und $\lambda\in S^{(I)}$ sowie $\gamma\in M^I$. Hier können wir uns auf den Fall, dass I endlich ist, beschränken (andernfalls ersetzen wir I durch $\operatorname{supp}\lambda$ und γ durch $\gamma|\operatorname{supp}\lambda$). Setze nun $\gamma_\lambda: I\to M, i\mapsto\sigma(\lambda i,\gamma i)$ und $(\varphi\circ\gamma)_\lambda: I\to M', i\mapsto\sigma'(\lambda i,(\varphi\circ\gamma)i)$. Dann gilt $\varphi\circ\gamma_\lambda=(\varphi\circ\gamma)_\lambda$ sowie $\lambda *^\sigma\gamma=\Sigma\gamma_\lambda$ und $\lambda *^{\sigma'}(\varphi\circ\gamma)=\Sigma(\varphi\circ\gamma)_\lambda$; es folgt $\varphi(\lambda *^\sigma\gamma)=\varphi(\Sigma\gamma_\lambda)$ $=\Sigma(\varphi\circ\gamma_\lambda)=\Sigma(\varphi\circ\gamma)_\lambda=\lambda *^{\sigma'}(\varphi\circ\gamma)$. ◇

"$\Leftarrow$" • Sei $\gamma\in M^I$. Für $\lambda: I\to S, i\mapsto 1$ ist dann $\lambda *^\sigma\gamma=\Sigma\gamma$ und $\lambda *^{\sigma'}(\varphi\circ\gamma)=\Sigma(\varphi\circ\gamma)$; also gilt $\varphi(\Sigma\gamma)=\varphi(\lambda *^\sigma\gamma)=\lambda *^\sigma(\varphi\circ\gamma)=\Sigma(\varphi\circ\gamma)$. ◇

• Sei $s\in S$ und $x\in M$. Für $\lambda:\{1\}\to S, 1\mapsto s$ und $\gamma:\{1\}\to M, 1\mapsto x$ ist dann $\sigma(s,x)=\sigma(\lambda 1,\gamma 1)=\lambda *^\sigma\gamma$; es folgt $\varphi\sigma(s,x)=\varphi(\lambda *^\sigma\gamma)=\lambda *^{\sigma'}(\varphi\circ\gamma)=\sigma'(\lambda 1,(\varphi\circ\gamma)1)$ $=\sigma'(s,\varphi x)$. □

Seite L4

(Ü4) Zu (a) • Für $\lambda \in S^I$ ist $\boxed{f_\gamma \lambda = \lambda * \gamma = \lambda 1 \cdot \gamma 1 + \lambda 2 \cdot \gamma 2 + \lambda 3 \cdot \gamma 3}$;

häufig setzt man $\lambda_i := \lambda i$ und $\gamma_i := \gamma i$; dann ist

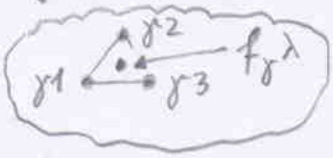
$$\boxed{f_\gamma \lambda = \lambda * \gamma = \lambda_1 \cdot \gamma_1 + \lambda_2 \cdot \gamma_2 + \lambda_3 \cdot \gamma_3}$$

• Für $S = \mathbb{R}$ und $\lambda = \frac{1}{3}(\delta_1^I + \delta_2^I + \delta_3^I) = \frac{1}{3}(1,1,1)$

ist für $\gamma \in M^I$ stets $f_\gamma \lambda = \frac{1}{3} \cdot \gamma 1 + \frac{1}{3} \cdot \gamma 2 + \frac{1}{3} \cdot \gamma 3$

d.h. $f_\gamma \lambda = \frac{1}{3} \cdot (\gamma 1 + \gamma 2 + \gamma 3)$ ist der "Schwerpunkt"

von γ in M.



Zu (b) • $f_\eta(\gamma 1) = 0 \cdot \eta 1 + 1 \cdot \eta 2 + 0 \cdot \eta 3 = \delta_1^I$

$f_\eta(\gamma 2) = -2 \cdot \eta 1 + 4 \cdot \eta 2 + 0 \cdot \eta 3 = -2 \cdot (2\delta_1^I - \frac{1}{2}\delta_2^I) + 4\delta_1^I = \delta_2^I$

$f_\eta(\gamma 3) = 0 \cdot \eta 1 + 0 \cdot \eta 2 + 1 \cdot \eta 3 = \delta_3^I$,

also ist $f_\eta(\gamma i) = \delta_i^I$ für alle $i \in I$, d.h., $\boxed{f_\eta \circ \gamma = \delta^I}$.

• $f_\gamma(\eta 1) = 2 \cdot \gamma 1 - \frac{1}{2} \cdot \gamma 2 + 0 \cdot \gamma 3 = 2 \cdot \delta_2^I - \frac{1}{2} \cdot (-2\delta_1^I + 4\delta_2^I) = \delta_1^I$

$f_\gamma(\eta 2) = 1 \cdot \gamma 1 + 0 \cdot \gamma 2 + 0 \cdot \gamma 3 = \delta_2^I$

$f_\gamma(\eta 3) = 0 \cdot \gamma 1 + 0 \cdot \gamma 2 + 1 \cdot \gamma 3 = \delta_3^I$,

also ist $f_\gamma(\eta i) = \delta_i^I$ für alle $i \in I$, d.h. $\boxed{f_\gamma \circ \eta = \delta^I}$.

(H5) Für alle $s, s_1, s_2 \in S$ und $x, x_1, x_2 \in S^{(P)}$ ist zu zeigen:

(1) $s\cdot(x_1+x_2) = s\cdot x_1 + s\cdot x_2$

(2) $(s_1+s_2)\cdot x = s_1\cdot x + s_2\cdot x$

(3) $(s_2\cdot s_1)\cdot x = s_2\cdot(s_1\cdot x)$

(4) $0\cdot x = \vec{0}$, $s\cdot\vec{0} = \vec{0}$, $1\cdot x = x$

Zu (1): $(s\cdot(x_1+x_2))p = s\cdot((x_1+x_2)p) = s\cdot(x_1p+x_2p) = s\cdot x_1p + s\cdot x_2p =$
$(s\cdot x_1)p + (s\cdot x_2)p = (s\cdot x_1 + s\cdot x_2)p$ für alle $p\in P$.

Zu (2): $((s_1+s_2)\cdot x)p = (s_1+s_2)\cdot xp = s_1\cdot xp + s_2\cdot xp = (s_1\cdot x)p + (s_2\cdot x)p =$
$(s_1\cdot x + s_2\cdot x)p$ für alle $p\in P$.

Zu (3): $((s_2\cdot s_1)\cdot x)p = (s_2\cdot s_1)\cdot xp = s_2\cdot(s_1\cdot xp) = s_2\cdot((s_1\cdot x)p =$
$(s_2\cdot(s_1\cdot x))p$ für alle $p\in P$. $\square$

(H6) Zeige $f_\gamma\circ\eta = \delta^P = f_\eta\circ\gamma$ für $\gamma,\eta\in(\mathbb{R}^P)^P$ mit
$\gamma 1 = \delta_2^P$ und $\gamma 2 = -2\delta_1^P + 3\delta_2^P$ sowie
$\eta 1 = 3/2\,\delta_1^P - 1/2\,\delta_2^P$ und $\eta 2 = \delta_1^P$.

Begründung:

- $(f_\gamma\circ\eta)1 = f_\gamma(\eta 1) = \eta 1 * \gamma = 3/2\,\gamma 1 - 1/2\,\gamma 2 =$
  $3/2\,\delta_2^P - 1/2(-2\delta_1^P + 3\delta_2^P) = \delta_1^P$ und
  $(f_\gamma\circ\eta)2 = \eta 2 * \gamma = 1\cdot\gamma 1 + 0\cdot\gamma 2 = \delta_2^P$ sowie
- $(f_\eta\circ\gamma)1 = \gamma 1 * \eta = 0\cdot\eta 1 + 1\cdot\eta 2 = \delta_1^P$ und
  $(f_\eta\circ\gamma)2 = \gamma 2 * \eta = -2\cdot\eta 1 + 3\cdot\eta 2 =$
  $-2\cdot(3/2\,\delta_1^P - 1/2\,\delta_2^P) + 3\cdot\delta_1^P = \delta_2^P$. $\square$

(H7) <u>Vorsicht</u>: Rolle von 0 und 1 als neutrale Elemente beachten!

$f_\gamma\lambda = \lambda * \gamma = (3, 3 +_{\mathbb{S}} 1_{\mathbb{S}}, 3\cdot_{\mathbb{S}} 2 +_{\mathbb{S}} 3 +_{\mathbb{S}} 5)$ für $\mathbb{S}\in\{\mathbb{R}, \mathbb{R}_{trop}, \mathbb{R}_{arc}\}$.

(i) $\lambda*\gamma = (3,4,14) = 3\delta_1^P + 4\delta_2^P + 14\delta_3^P$ für $\mathbb{S}=\mathbb{R}$

(ii) $\lambda*\gamma = (3,0,3) = 3\delta_1^P +_{trop} \delta_2^P +_{trop} 3\delta_3^P$ für $\mathbb{S}=\mathbb{R}_{trop}$, hier: $\boxed{0 = 1_{trop}}$

(iii) $\lambda*\gamma = (3,3,5) = 3\delta_1^P +_{arc} 3\delta_2^P +_{arc} 5\delta_3^P$ für $\mathbb{S}=\mathbb{R}_{arc}$.