12. Übungsblatt für die Übungen vom 20.1. bis 24.1.2014

Hausaufgaben bitte bis zum 27.1.2014 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Bilde $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ eine Gruppe. Ein Morphismus φ von $\mathbb{M}$ in sich heiße *Endomorphismus.* Es ist φ *idempotent,* falls $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi$ gleich φ ist (d.h. $\varphi(\varphi x) = \varphi x$ gilt für alle $x \in M$). Eine *Projektion* ist definiert als idempotenter Endomorphismus.

Zeige:

(a) Ist φ Endomorphismus von $\mathbb{M}$, so bildet $\operatorname{Im}\varphi := \varphi M$ (d.h. $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi x \mid x \in M\}$) eine Untergruppe und $\operatorname{Ker}\varphi := \{x \in M \mid \varphi x = 0\}$ einen Normalteiler von $\mathbb{M}$.

(b) $\varphi^2 = 0$ (d.h. $\varphi(\varphi x) = 0$ für alle $x \in M$) ist gleichbedeutend mit $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

(c) Sei φ Projektion von $\mathbb{M}$. Dann gilt

  i. $\operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi = M$, d.h. $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi = M$ und $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

  ii. für jedes $X \in 2^M$ ist $(X + \operatorname{Ker}\varphi) \cap \operatorname{Im}\varphi = \varphi X$.

(d) Bilde $U \subseteq M$ Untergruppe und $Z \subseteq M$ Normalteiler von $\mathbb{M}$ mit $U \oplus Z = M$ (d.h. $U + Z = M$ und $U \cap Z = \{0\}$). Dann existiert genau eine Projektion φ von $\mathbb{M}$ mit $\operatorname{Im}\varphi = U$ und $\operatorname{Ker}\varphi = Z$.

Folgere hieraus: Bezeichnet $\mathbb{U}$ die durch U in $\mathbb{M}$ induzierte Untergruppe, so gilt
$$\mathbb{M}/Z \simeq \mathbb{U}.$$

Ü2. Gegeben sei ein kommutatives Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$, welches eine Gruppe bildet. Außerdem sei P eine endliche Menge und f ein Morphismus von $\mathbb{Z}^P_{\text{add}}$ nach $\mathbb{M}$.

(a) Finde $\gamma \in \mathbb{Z}^P$ mit $f = f_\gamma$, d.h., f ist die Linearkombinationsabbildung zu γ bzgl. $\mathbb{M}$ über $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.

(b) Ist g ein weiterer Morphismus von $\mathbb{Z}^P_{\text{add}}$ nach $\mathbb{M}$ mit $g \circ \delta^P = f \circ \delta^P$, d.h.
$$\forall p \in P : g(\delta^P_p) = f(\delta^P_p),$$
so folgere $g = f$.

Ü3. für $P = [2]$ seien γ und η Abbildungen von P nach $\mathbb{Z}^P$ mit $\gamma 1 = \delta_1^P$ und $\gamma 2 = 0_P$ sowie $\eta 1 = \delta_2^P$ und $\eta 2 = 0_P$.

Vergleiche f_γ und f_η in Hinblich auf Ü1 und bestimme jeweils Mengenkern und Bildmenge.

Ü4. Bestimme für $S := \underline{3} = \{0, 1, 2\}$ sämtliche Semiringe $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ mit $1 + 1 = 2$.

H5. Sei $\mathbb{M} := (M, +, \vec{0})$ mit $M := \mathbb{R}^2$ und

$$(t_1, t_2) + (x_1, x_2) := (t_1 + x_1, t_2 + x_2)$$

für alle $t_1, t_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sowie $\vec{0} := (0, 0)$. Dann bildet $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2_{\text{add}}$ eine kommutative Gruppe.

(a) Zeige, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

ein Endomorphismus von $\mathbb{M}$ ist; außerdem bestimme $\operatorname{Im} f$ sowie $\operatorname{Ker} f$ und begründe

$$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^2.$$

(b) Zu jedem $x = (x_1, x_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ finde $u_x \in \operatorname{Im} f$ und $z_x \in \operatorname{Ker} f$ mit $x = u_x + z_x$ und zeige, dass $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto u_x$ eine Projektion von $\mathbb{M}$ ist mit $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f$.

H6. Wir betrachten $\mathbb{Z}^P_{\text{add}}$ für $P := [3]$.

(a) Seien $\gamma, \eta \in (\mathbb{Z}^P)^P$ gegeben durch

$$\gamma 1 = \delta_1^P - \delta_2^P \qquad \gamma 2 = \delta_2^P - \delta_3^P \qquad \gamma 3 = \delta_3^P$$
$$\eta 1 = \delta_1^P + \delta_2^P + \delta_3^P \qquad \eta 2 = \delta_2^P + \delta_3^P \qquad \eta 3 = \delta_3^P$$

Zeige, dass f_γ und f_η zueinander invers sind.

(b) Für $\gamma \in (\mathbb{Z}^P)^P$ mit $\gamma 1 = \delta_2^P$, $\gamma 2 = \delta_3^P$, $\gamma 3 = \delta_1^P$ und $\varphi := f_\gamma$ begründe $\varphi^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^P}$ (wobei $\varphi^3 := \varphi \circ \varphi \circ \varphi$) und bestimme

$$\operatorname{Fix}(\varphi) := \left\{\lambda \in \mathbb{Z}^P \middle| \varphi\lambda = \lambda\right\} = \left\{\lambda \in \mathbb{Z}^P \middle| \lambda * \gamma = \lambda\right\}$$

H7. Ein Semiring $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ heiße *(additiv) idempotent,* falls $x + x = x$ für alle $x \in S$ gilt.

Sei nun $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein dreielementiger Semiring mit $S = \{0, 1, s\}$ derart, dass $1 + 1 \neq s$ ist.

(a) Zeige, dass $\mathbb{S}$ idempotent ist.

(b) Begründe $1 + s \neq 0$ und $s \cdot s \neq 1$.

Zusatzfrage: Ist es hier möglich, dass $\mathbb{S}$ auch multiplikativ idempotent ist (d.h., $x \cdot x = x$ gilt für alle $x \in S$)?