 (Ü1) Zu (a) • $\operatorname{Im}\varphi$ bildet Untergruppe von $\mathbb{M}$.

Begründung: Zu $u, w \in \operatorname{Im}\varphi$ existieren stets $t, x \in M$ mit $u = \varphi t$ und $w = \varphi x$. Folglich ist $u + w = \varphi t + \varphi x = \varphi(t + x) \in \operatorname{Im}\varphi$.
Außerdem ist $0 = \varphi 0 \in \operatorname{Im}\varphi$, und zu jedem $u \in \operatorname{Im}\varphi$ existiert ein $t \in M$ mit $u = \varphi t$; folglich ist $\varphi t + \varphi(-t) = \varphi(t + (-t)) = \varphi 0 = 0$, also $-u = -\varphi t = \varphi(-t) \in \operatorname{Im}\varphi$. ◇

• $\operatorname{Ker}\varphi$ ist Normalteiler von $\mathbb{M}$.

Begründung: $\ker\varphi$ ist Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$ (siehe Vorlesung). Folglich ist $\operatorname{Ker}\varphi = [0]\ker\varphi$ Normalteiler von $\mathbb{M}$ (siehe Ü1, Blatt 11). ◇

Zu (b) • Sei $\varphi^2 = 0$. Zu jedem $y \in \operatorname{Im}\varphi$ existiert ein $x \in M$ mit $\varphi x = y$; es folgt $\varphi y = \varphi(\varphi x) = 0$, also $y \in \operatorname{Ker}\varphi$; somit ist $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. ◇

• Gelte $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Für jedes $x \in M$ ist dann $\varphi x \in \operatorname{Im}\varphi$, also nach Voraussetzung auch $\varphi x \in \operatorname{Ker}\varphi$, d.h. $\varphi(\varphi x) = 0$. Es folgt $\varphi^2 = 0$. ◇

Zu (c1) • Ist $x \in M$, so gilt für $z := \varphi(-x) + x$ stets $\varphi z = \varphi(\varphi(-x)) + \varphi x = \varphi(-x) + \varphi x = \varphi((-x) + x) = \varphi 0 = 0$, woraus sich $z \in \operatorname{Ker}\varphi$ ergibt. Wegen $\varphi(-x) = -\varphi x$ folgt $x = (\varphi x) + z \in \operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi$. Also gilt $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi = M$. ◇

• Sei $y \in \operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi$. Dann existiert ein $x \in M$ mit $y = \varphi x$, woraus $y = \varphi x = \varphi^2 x = \varphi(\varphi x) = \varphi y = 0$ folgt (letzteres, da $y \in \operatorname{Ker}\varphi$). Also gilt $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. ◇

Zu (c2) "$\subseteq$": Sei $w \in (X + \operatorname{Ker}\varphi) \cap \operatorname{Im}\varphi$. Dann existieren $x \in X$, $z \in \operatorname{Ker}\varphi$, $t \in M$ mit $w = x + z$ und $w = \varphi t$. Es folgt $w = \varphi t = \varphi^2 t = \varphi(\varphi t) = \varphi w = \varphi x + \varphi z = \varphi x \in \varphi X$. ◇

"$\supseteq$": Sei $w \in \varphi X$. Dann existiert $x \in X$ mit $w = \varphi x$. Für $z := (-x) + w$ folgt $\varphi z = \varphi(-x) + \varphi w = -\varphi x + \varphi^2 x = -\varphi x + \varphi x = 0$, woraus sich $w = x + z \in (X + \operatorname{Ker}\varphi) \cap \operatorname{Im}\varphi$ ergibt. ◇

Seite L2 (Ü1) Zu (d): Eindeutigkeit Existiert eine Projektion φ von M mit $\operatorname{Im}\varphi = U$ und $\operatorname{Ker}\varphi = Z$, so gilt nach (c2) für jedes $x \in M$ bereits $(x+U)\cap Z = \{\varphi x\}$, d.h., φ ist durch x mittels Z und U schon eindeutig bestimmt. ◇

Existenz • Zu jedem $x \in M$ existiert genau ein $u_x \in U$ mit $(x+Z)\cap U = \{u_x\}$. $(\ast)$

Begründung: (1) Zu jedem $x \in M = U+Z$ existieren $u \in U$ und $z \in Z$ mit $x = u+z$. Folglich ist $x+(-z) = u \in (x+Z)\cap U$.

(2) Sind $u, u' \in (x+Z)\cap U$, so existieren $z, z' \in Z$ mit $u = x+z$ und $u' = x'+z'$. Es folgt $u+(-z) = x = u'+(-z')$ und somit $t := (-u')+u = (-z')+z$, woraus sich $t \in U\cap Z = \{0\}$, also $t = 0$ ergibt, und wir erhalten $u = u'$. ◇

• Die Abbildung $\varphi: M \to M$, $x \mapsto u_x$ ist eine Projektion von M mit $\operatorname{Ker}\varphi = Z$ und $\operatorname{Im}\varphi = U$.

Begründung: Bezeichne Θ die zu Z gehörige Kongruenzrelation von M. Für jedes $x \in M$ gilt dann wegen $[x]\Theta = x+Z$ und $\varphi x = u_x$ nach $(\ast)$ bereits:

$$\boxed{[x]\Theta \cap U = \{\varphi x\}} \quad \left(\substack{\ast\\ \ast}\right)$$

Für beliebige $t, x \in M$ ist folglich $\varphi t \,\Theta\, t$ und $\varphi x \,\Theta\, x$, also auch $\varphi t + \varphi x \,\Theta\, t+x$, wegen $\varphi(t+x) \,\Theta\, t+x$ ergibt sich $\varphi t + \varphi x \,\Theta\, \varphi(t+x)$, woraus wegen $\varphi t + \varphi x, \varphi(x+t) \in U$ nunmehr $\boxed{\varphi t + \varphi x = \varphi(t+x)}$ verifiziert ist.

$\left(\substack{\ast\\ \ast}\right)$ impliziert $\varphi t = t$ für alle $t \in U$; daher ist $U \subseteq \operatorname{Im}\varphi$ und mit $\left(\substack{\ast\\ \ast}\right)$ auch $\operatorname{Im}\varphi \subseteq U$, d.h. $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = U}$.

Außerdem folgt für jedes $x \in M$ wegen $\varphi x \in U$ bereits $\varphi^2 x = \varphi(\varphi x) = \varphi x$, d.h. $\boxed{\varphi^2 = \varphi}$.

Schließlich gilt für $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ stets $x \,\Theta\, \varphi x = 0$, d.h., $x \in [0]\Theta = Z$. Also ist $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z$. – Andererseits impliziert $x \in Z = [0]\Theta$ bereits $\varphi x \in [x]\Theta = [0]\Theta = Z$, also $\varphi x \in Z \cap U = \{0\}$, d.h. $x \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Ergebnis: $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = Z}$. □

Seite L3 (Ü2) Situation zu (a):

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[dr, dashed, "\boxed{\gamma := ?}"] & \\ \mathbb{Z}^P_{\mathrm{add}} \arrow[rr, "f"'] & & M \end{tikzcd}$$

Setze $\gamma := f \circ \delta^P$. Dann folgt aus der Eindeutigkeit von f_γ sofort $f = f_\gamma$. ◇

Explizit begründet: Wegen $\gamma p = f(\delta^P_p)$ für alle $p \in P$ folgt für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}^P$ wegen $\lambda = \sum_{p \in P} \lambda p \cdot \delta^P_p$ bereits

$$f\lambda = \sum_{p\in P} \lambda p \cdot \underbrace{f(\delta^P_p)}_{\gamma p} = \lambda * \gamma = f_\gamma \lambda \quad . ◇$$

Zu (b) Für $\gamma := g \circ \delta^P = f \circ \delta^P$ folgt $g = f_\gamma = f$ nach (a). ◇

(Ü3) Für $\lambda : P \to \mathbb{Z}, p \mapsto \lambda_p$ ist $\lambda = \lambda_1 \delta^P_1 + \lambda_2 \delta^P_2$, also $\lambda \xmapsto{f_\gamma} \lambda_1\delta^P_1 = \lambda_1\delta^P_1 + 0\cdot\delta^P_2 \xmapsto{f_\gamma} \lambda_1\delta^P_1$, woraus $f_\gamma^2 = f_\gamma$ folgt, d.h. f_γ ist eine Projektion.

Für $\lambda \in \mathbb{Z}^P$ ist $\boxed{f_\gamma \lambda = 0_P \iff \lambda_1 = 0}$. Wir erhalten:

$$\mathrm{Ker} f_\gamma = \mathbb{Z}\delta^P_2 := \{z\delta^P_2 \mid z \in \mathbb{Z}\} \text{ und } \mathrm{Im} f_\gamma = \mathbb{Z}\delta^P_1 . ◇$$

Entsprechend gilt für $\lambda \in \mathbb{Z}^P$ stets

$$\lambda \xmapsto{f_\eta} \lambda_1 \cdot \eta 1 + \lambda_2 \cdot \eta 2 = \lambda_1 \delta^P_2 = 0 \cdot \delta^P_1 + \lambda_1 \delta^P_2 \xmapsto{f_\eta} 0\delta^P_2 = 0_P,$$

d.h. f_η^2 ist die Nullabbildung. Wir erhalten:

$$\mathrm{Im} f_\eta = \mathbb{Z}\delta^P_2 = \mathrm{Ker} f_\eta \quad . \quad ◇$$

Seite L4 Ü4 Setze $s := 2+1$ und $t := s+1$.

Dann hat man folgende Verknüpfungstafeln:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	s
2	2	s	t

&

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	t

wegen $2+2 = (2+1)+1 = s+1 = t$ und also
$2\cdot 2 = 2\cdot(1+1) = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2+2 = t$.

Fall 1: $\boxed{s=0}$. Dann ist $t=1$, und es folgt $\boxed{\mathbb{S} = \mathbb{Z}_3}$.

Fall 2: $\boxed{s=2}$. Dann ist $t = 2+1 = s = 2$, und es folgt $\boxed{\mathbb{S} = \mathrm{trunc}_3}$.

Fall 3: $\boxed{s=1}$. Dann ist $t = 1+1 = 2$ und wir erhalten:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	1
2	2	1	2

&

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

. □

(H5) (a)&(b): • Sind $t=(t_1,t_2)$ und $x=(x_1,x_2)$ aus $\mathbb{R}^2$, so gilt für $r:=(t_1+x_1)+(t_2+x_2)=(t_1+t_2)+(x_1+x_2)$ stets $f(t+x)=f(t_1+x_1,t_2+x_2)=r=ft+fx$.
Außerdem ist $f\vec{0}=(0+0,0+0)=\vec{0}$.
Ferner ersieht man leicht $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}(1,1):=\{(r,r)\mid r\in\mathbb{R}\}$ und $\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}(1,-1):=\{(r,-r)\mid r\in\mathbb{R}\}$ sowie $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}(1,1)\cap\mathbb{R}(1,-1)=\{\vec{0}\}$.

• Für $x=(x_1,x_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ sei $r_x:=\frac{x_1+x_2}{2}$ und $s_x:=\frac{x_1-x_2}{2}$ sowie $u_x:=(r_x,r_x)$ und $z_x:=(s_x,-s_x)$.
Dann ist $u_x\in\mathbb{R}(1,1)=\operatorname{Im} f$ und $z_x\in\mathbb{R}(1,-1)=\operatorname{Ker} f$, und es ist $x=(x_1,x_2)=(r_x+s_x,r_x-s_x)=u_x+z_x$.
Überdies ist die Abbildung φ idempotent, da $\varphi^2x=\varphi(u_x)=\varphi(r_x,r_x)=\left(\frac{r_x+r_x}{2},\frac{r_x+r_x}{2}\right)=(r_x,r_x)$ $=u_x=\varphi x$ für alle $x\in\mathbb{R}^2$.
Ferner ist $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}(1,1)=\operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{R}(1,-1)=\operatorname{Ker} f$. □

(H6) Zu (a) Wir zeigen $f_\eta \circ \gamma = \delta^P$ und $f_\gamma \circ \eta = \delta^P$:

- $f_\eta(\gamma 1) = f_\eta(\delta_1^P - \delta_2^P) = \eta 1 - \eta 2 = \delta_1^P$
  $f_\eta(\gamma 2) = f_\eta(\delta_2^P - \delta_3^P) = \eta 2 - \eta 3 = \delta_2^P$
  $f_\eta(\gamma 3) = f_\eta(\delta_3^P) = \eta 3 = \delta_3^P$, also gilt
  $f_\eta \circ \gamma = \delta^P$ und folglich $f_\eta \circ f_\gamma = id_{\mathbb{Z}^P}$. ◇
- $f_\gamma(\eta 1) = f_\gamma(\delta_1^P + \delta_2^P + \delta_3^P) = \gamma 1 + \gamma 2 + \gamma 3 = \delta_1^P$
  $f_\gamma(\eta 2) = f_\gamma(\delta_2^P + \delta_3^P) = \gamma 2 + \gamma 3 = \delta_2^P$
  $f_\gamma(\eta 3) = f_\gamma(\delta_3^P) = \gamma 3 = \delta_3^P$, also gilt
  $f_\gamma \circ \eta = \delta^P$ und folglich $f_\gamma \circ f_\eta = id_{\mathbb{Z}^P}$. ◇

Zu (b)

- Es ist $\varphi^3(\delta_1^P) = \varphi^2(\delta_2^P) = \varphi(\delta_3^P) = \delta_1^P$,
  $\varphi^3(\delta_2^P) = \varphi^2(\delta_3^P) = \varphi(\delta_1^P) = \delta_2^P$,
  $\varphi^3(\delta_3^P) = \varphi^2(\delta_1^P) = \varphi(\delta_2^P) = \delta_3^P$,
  es gilt also $\varphi^3 \circ \delta^P = \delta^P = id_{\mathbb{Z}^P} \circ \delta^P$, d.h.,
  $$\boxed{\varphi^3 = id_{\mathbb{Z}^P}}\ . \quad ◇$$
- Für $\lambda : P \to \mathbb{Z}$, $p \mapsto \lambda_p$ ist $\lambda * \gamma = \lambda$
  äquivalent zu $\lambda_1 \delta_2^P + \lambda_2 \delta_3^P + \lambda_3 \delta_1^P =$
  $\lambda_1 \delta_1^P + \lambda_2 \delta_2^P + \lambda_3 \delta_3^P$, d.h. $(\lambda_1 = \lambda_2) \wedge (\lambda_2 = \lambda_3) \wedge (\lambda_3 = \lambda_1)$,
  d.h. $\lambda \in \mathbb{Z}(\delta_1^P + \delta_2^P + \delta_3^P) := \{ z \cdot \delta_1^P + z \cdot \delta_2^P + z \delta_3^P \mid z \in \mathbb{Z} \}$.

<u>Ergebnis</u>: $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathbb{Z}(\delta_1^P + \delta_2^P + \delta_3^P)$. □

Seite L7

(H8) Es ist $S=\{0,1,s\}$ mit $1+1\neq s$.

- Angenommen: $1+1=0$. Dann ist auch $s+s=s\cdot(1+1)=s\cdot 0=0$.

  Fall 1: $1+s=0$. Dann ist $s=(1+1)+s=1+(1+s)=1+0=1$ ↯

  Fall 2: $1+s=s$. Dann ist $1=1+(s+s)=(1+s)+s=s+s=0$ ↯

  Fall 3: $1+s=1$. Dann ist $s=(1+1)+s=1+(1+s)=1+1=0$ ↯

  Also ist $1+1\neq 0$ und es folgt $1+1=1$ sowie

  $s+s=s\cdot(1+1)=s\cdot 1=s$, woraus sich wegen $0+0=0$

  ergibt, dass $\mathcal{S}$ (additiv) idempotent ist.

- Angenommen: $1+s=0$. Wegen $1+1=1$ folgt dann

  $0=1+s=(1+1)+s=1+(1+s)=1+0=1$ ↯

  Also ist $\boxed{1+s\neq 0}$.

- Angenommen: $s\cdot s=1$.

  Fall: $1+s=s$. Dann ist $1=s\cdot s=(1+s)\cdot s=s+s\cdot s=s+1=s$ ↯

  Fall: $1+s=1$. Dann ist $s=s\cdot 1=s\cdot(1+s)=s+s\cdot s=s+1=1$ ↯

  Also ist $\boxed{s\cdot s\neq 1}$.

- Zusatzfrage: Ja, $\mathcal{S}$ kann auch multiplikativ idempotent sein: Zum Beispiel ist $S=\{0,1,s\}$ für $s:=1/2$ ein Untersemiring des Fuzzy-Semirings

  $\mathcal{S}_{Fuzzy}:=\{[0,1],\vee,\wedge,0,1\}$.