11. Übungsblatt für die Übungen vom 13.1. bis 17.1.2014

Hausaufgaben bitte bis zum 20.1.2014 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Sei $\mathbb{M} = (M, *_\mathbb{M}, 1_\mathbb{M})$ ein Monoid, welches eine Gruppe bildet.

$U \subseteq M$ heiße *Normalteiler* von $\mathbb{M}$, falls U eine *Untergruppe* von $\mathbb{M}$ bildet (d.h. $\forall u, w \in U(u *_\mathbb{M} w \in U) \wedge 1_\mathbb{M} \in U \wedge \forall u \in U(u^{-1} \in U))$, sowie $t *_\mathbb{M} U = U *_\mathbb{M} t$ für alle $t \in M$ gilt.

Zeige:

(a) Ist U Normalteiler von $\mathbb{M}$, so ist

$$\Theta_U := \{(t, x) \in M \times M \mid t *_\mathbb{M} U = x *_\mathbb{M} U\}$$

eine Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$ mit $[1_\mathbb{M}]\Theta_U = U$.

(b) Ist Θ Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$, so ist $U := [1_\mathbb{M}]\Theta$ Normalteiler von $\mathbb{M}$ mit $\Theta_U = \Theta$.

Dies erlaubt folgende Notation: $\mathbb{M}/U := \mathbb{M}/\Theta$.

Zur Erinnerung: Θ ist Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$, falls Θ Äquivalenzrelation auf M ist, die für alle $t_1, t_2, x_1, x_2 \in M$ erfüllt, dass aus $t_1 \Theta x_1$ und $t_2 \Theta x_2$ stets $t_1 *_\mathbb{M} t_2 \Theta x_1 *_\mathbb{M} x_2$ folgt.

Zusatzfrage: Warum ist jede Untergruppe einer kommutativen Gruppe bereits ein Normalteiler?

Ü2. Sei $\mathbb{M} = (M, *, e)$ Monoid, und seien $a, b \in M$ mit $a * b = e$.

(a) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv?

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* a &: M \to M, x \mapsto a * x \\ \mathbf{r}_* b &: M \to M, x \mapsto b * x \\ \mathbf{c}_* a &: M \to M, x \mapsto x * a \\ \mathbf{c}_* b &: M \to M, x \mapsto x * b \end{aligned}$$

(b) Zeige, dass $b * a$ sowohl in $\mathrm{Ker}(\mathbf{r}_* a)$ als auch in $\mathrm{Ker}(\mathbf{c}_* b)$ liegt.

(c) Gilt zusätzlich $b' * a = e$ für ein $b' \in M$, so folgere $b' = b$.

(d) Ein Isomorphismus eines Monoids in sich (also ein bijektiver Morphismus $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$) heiße *Automorphismus.*

Folgere aus $a * b = e = b * a$, dass die Abbildungen

$$\varphi : M \to M, x \mapsto a * x * b$$
$$\psi : M \to M, x \mapsto b * x * a$$

zueinander inverse Automorphismen von $\mathbb{M}$ sind.

Ü3. *Vorspann:* "Der Koordinatenbereich $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$":

Bilde $\mathbb{V} = (V, +, 0_{\mathbb{V}})$ eine kommutative Gruppe, deren Elemente wir als "abstrakte Vektoren" auffassen mögen. Für eine endliche Menge P wählen wir dann $\gamma \in V^P$ und interpretieren $\gamma = (\gamma p)_{p \in P}$ als endliche Familie abstrakter Vektoren in $\mathbb{V}$.

Für $\lambda \in \mathbb{Z}^P$ heiße dann

$$\lambda * \gamma := \sum_{p \in P} \lambda p \cdot \gamma p$$

die *Linearkombination* des *Koordinatenvektors* λ mit γ in $\mathbb{V}$ über dem *Koordinatenbereich* $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$. Es heiße $f_\gamma : \mathbb{Z}^P \to V, \lambda \mapsto \lambda * \gamma$ die *Linearkombinationsabbildung* zu γ bzgl $\mathbb{V}$ über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe: Zeige, dass f_γ Morphismus von $\mathbb{Z}^P_{\text{add}}$ nach $\mathbb{V}$ ist.

Ü4. Mit den Bezeichnungen der vorigen Übung sei $P := [2]$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^{P \times P}$ tabellarisch wie folgt gegeben:

	1	2
1	3	4
2	2	3

(a) Zur ROW-MAP $\gamma := \mathbf{r}_\alpha$ bestimme $f_\gamma : \mathbb{Z}^P \to \mathbb{Z}^P, \lambda \mapsto \lambda * \gamma$.

(b) Finde ein $\beta \in \mathbb{Z}^{P \times P}$ derart, dass für $\eta := \mathbf{r}_\beta$ die Abbildung f_η zu f_γ invers ist.

H5. Im Kontext von Aufgabe H5, Blatt 9 betrachte folgende Abbildung:

$$\varphi : \underline{12} \to \underline{12}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 3x & \text{falls } x < 4 \\ 3x - 12 & \text{falls } 4 \leq x < 8 \\ 3x - 24 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme $\underline{12}/\ker \varphi$ explizit.

(b) Zeige, dass φ Morphismus von C_{12} in sich ist.

(c) Verifiziere explizit:

$$L(\varphi x = 6) = 2 +_{12} L(\varphi x = 0)$$

H6. Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}^3 &\to \mathbb{Z}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3) \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass φ Morphismus von $\mathbb{Z}^3_{\text{add}}$ nach $\mathbb{Z}^2_{\text{add}}$ ist und bestimme $\operatorname{Ker}\varphi$.

(b) Für $a := (3, 2, 1)$ und $b := (1, 1)$ überprüfe $\varphi a = b$ und bestimme die Lösungsmenge zur Gleichung $\varphi x = b$.

H7. Gehe von der Situation in Ü2 aus.

(a) Zeige: Ist $a * b = e = b * a$, so ist $\mathbf{r}_* a$ invers zu $\mathbf{r}_* b$.

(b) Verwende folgendes wichtige Faktum: Ist die Menge M endlich, so ist eine Abbildung $f : M \to M$ bereits bijektiv, falls f injektiv oder surjektiv ist.

Zeige: Ist das Monoid $\mathbb{M}$ endlich (d.h. M ist endlich), so folgt aus $a * b = e$ bereits, dass die Abbildungen $\mathbf{r}_* a$, $\mathbf{r}_* b$, $\mathbf{c}_* a$, $\mathbf{c}_* b$, bijektiv sind.

Folgere hieraus $b * a = e$, d.h., a und b sind in $\mathbb{M}$ zueinander invers.

H8. Mit den Bezeichnungen von Ü3 sei $P := [3]$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^{P \times P}$ tabellarisch wie folgt gegeben:

	1	2	3
1	1	0	3
2	0	1	2
3	0	0	1

(a) Zur ROW-MAP $\gamma := \mathbf{r}_\alpha$ bestimme

$$\begin{aligned} f_\gamma : \mathbb{Z}^P &\to \mathbb{Z}^P \\ \lambda &\mapsto \lambda * \gamma. \end{aligned}$$

(b) Sei $\beta \in \mathbb{Z}^{P \times P}$ gegeben durch

	1	2	3
1	1	0	-3
2	0	1	-2
3	0	0	1

Begründe für $\eta := \mathbf{r}_\beta$, dass f_η zu f_γ invers ist.