Seite 1

LAAG WiS 2013/14

ÜBUNGEN BLATT 11 (einfaches Beweisen üben)

Ü1 Sei $\mathbb{M} = (M, *_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}})$ ein Monoid, welches eine Gruppe bildet.
$U \subseteq M$ heisse <u>Normalteiler</u> von $\mathbb{M}$, falls U eine <u>Untergruppe</u> von $\mathbb{M}$ bildet (d.h. $\forall u, w \in U (u *_{\mathbb{M}} w \in U) \wedge 1_{\mathbb{M}} \in U \wedge \forall u \in U (u^{-1} \in U)$) und $t *_{\mathbb{M}} U = U *_{\mathbb{M}} t$ für alle $t \in M$ gilt.

Zeige: (a) Ist U Normalteiler von $\mathbb{M}$, so ist $\Theta_U := \{(t, x) \in M \times M \mid t *_{\mathbb{M}} U = x *_{\mathbb{M}} U\}$ eine Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$ mit $[1_{\mathbb{M}}]\Theta_U = U$.
(b) Ist Θ Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$, so ist $U := [1_{\mathbb{M}}]\Theta$ Normalteiler von $\mathbb{M}$ mit $\Theta_U = \Theta$.

<u>Notation</u>: $\mathbb{M}/U := \mathbb{M}/\Theta$.

<u>Zur Erinnerung</u>: Θ ist Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$, falls Θ Äquivalenzrelation auf M ist, die für alle $t_1, t_2, x_1, x_2 \in M$ erfüllt, dass aus $t_1 \Theta x_1$ und $t_2 \Theta x_2$ stets $t_1 *_{\mathbb{M}} t_2 \,\Theta\, x_1 *_{\mathbb{M}} x_2$ folgt.

<u>Zusatzfrage</u>: Warum ist jede Untergruppe einer kommutativen Gruppe bereits ein Normalteiler?

Ü2 Sei $\mathbb{M} = (M, *, e)$ Monoid und seien $a, b \in M$ mit $a * b = e$.

(a) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv?

$\tau_* a : M \to M,\ x \mapsto a * x$

$\tau_* b : M \to M,\ x \mapsto b * x$

$c_* a : M \to M,\ x \mapsto x * a$

$c_* b : M \to M,\ x \mapsto x * b$

(b) Zeige, dass $b * a$ sowohl in $\mathrm{Ker}(\tau_* a)$ als auch in $\mathrm{Ker}(c_* b)$ liegt.

(c) Gilt zusätzlich $b' * a = e$ für ein $b' \in M$, so folgere $b' = b$.

(d) Ein Isomorphismus eines Monoids in sich (also ein Isomorphismus $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$) heisse <u>Automorphismus</u>.
Folgere aus $a * b = e = b * a$, dass die Abbildungen

$$\varphi : M \to M,\ x \mapsto a * x * b$$

und $\psi : M \to M,\ x \mapsto b * x * a$ zueinander inverse Automorphismen von $\mathbb{M}$ sind.

Seite 3

Ü3 Vorspann "Der Koordinatenbereich $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$":
Bilde $\mathbb{V} = (V, +, 0_{\mathbb{V}})$ eine kommutative Gruppe, deren Elemente wir als "abstrakte Vektoren" auffassen mögen. Für eine endliche Menge P wählen wir dann $\gamma \in V^P$ und interpretieren $\gamma = (\gamma p)_{p \in P}$ als endliche Familie abstrakter Vektoren in $\mathbb{V}$.
Für $\lambda \in \mathbb{Z}^P$ heisse dann

$$\lambda * \gamma := \sum_{p \in P} \lambda p \cdot \gamma p$$

die Linearkombination des Koordinatenvektors λ mit γ in $\mathbb{V}$ über dem Koordinatenbereich $\mathbb{Z} := (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.
Es heisse $f_\gamma : \mathbb{Z}^P \to V$, $\lambda \mapsto \lambda * \gamma$
die Linearkombinationsabbildung zu γ bzgl $\mathbb{V}$ über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe

(a) Zeige, dass f_γ Morphismus von $\mathbb{Z}^P_{\text{add}}$ nach $\mathbb{V}$ ist.

Ü4 Mit den Bezeichnungen von Ü3 sei $P := [2]$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^{P \times P}$ tabellarisch wie folgt gegeben:

	1	2
1	3	4
2	2	3

(a) Zur ROW-MAP $\gamma := r_\alpha$ bestimme

$$f_\gamma : \mathbb{Z}^P \to \mathbb{Z}^P, \ \lambda \mapsto \lambda * \gamma$$

(b) Finde ein $\beta \in \mathbb{Z}^{P \times P}$ derart, dass für $\eta := r_\beta$ die Abbildung f_η zu f_γ invers ist.

(H1) Im Kontext von Aufgabe H5, Blatt 9 betrachte folgende Abbildung:

$$\varphi : \underline{12} \to \underline{12},\ x \mapsto \begin{cases} 3x & \text{falls } x<4 \\ 3x-12 & \text{falls } 4 \leq x < 8 \\ 3x-24 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimme $\underline{12}/\ker\varphi$ explizit.

(b) Zeige, dass φ Morphismus von C_{12} in sich ist.

(c) Verifiziere explizit:

$$L(\varphi x = 6) = 2 +_{12} L(\varphi x = 0)$$

(H2) Sei $\varphi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$.

(a) Zeige, dass φ Morphismus von $\mathbb{Z}^3_{\mathrm{add}}$ nach $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{add}}$ ist und bestimme $\operatorname{Ker}\varphi$.

(b) Für $a := (3,2,1)$ und $b := (1,1)$ überprüfe $\varphi a = b$ und bestimme die Lösungsmenge zur Gleichung $\varphi x = b$.

Seite 6

(H3) Gehe von der Situation in Ü2 aus.

(a) Zeige: Ist $a*b = e = b*a$, so ist r_*a invers zu r_*b.

(b) Verwende folgendes wichtige Faktum:
Ist die Menge M endlich, so ist eine Abbildung $f: M \to M$ bereits bijektiv, falls f injektiv oder surjektiv ist.
Zeige: Ist das Monoid $\mathbb{M}$ endlich (d.h. M ist endlich), so folgt aus $a*b=e$ bereits, dass die Abbildungen r_*a, r_*b, c_*a, c_*b bijektiv sind.
Folgere hieraus $b*a=e$, d.h., a und b sind in $\mathbb{M}$ zueinander invers.

(H4) Mit den Bezeichnungen von Ü3 sei $P := [3]$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^{P\times P}$ tabellarisch wie folgt gegeben:

	1	2	3
1	1	0	3
2	0	1	2
3	0	0	1

(a) Zur ROW-MAP $\gamma := r_\alpha$ bestimme

$$f_\gamma : \mathbb{Z}^P \to \mathbb{Z}^P,\ \lambda \mapsto \lambda * \gamma$$

(b) Sei $\beta \in \mathbb{Z}^{P\times P}$ gegeben durch

	1	2	3
1	1	0	-3
2	0	1	-2
3	0	0	1

Begründe für $\eta := r_\beta$, dass f_η zu f_γ invers ist.