LAAG WiS 2013/14

Ü1 Zunächst setze $t * x := t *_{\mathbb{M}} x$ für alle $t, x \in M$, und zeige folgende "Vorbereitungsaussage":

($*$) Bildet $U \subseteq M$ eine Untergruppe von $\mathbb{M}$ und ist $u \in U$, so gilt $u * U = U$.

Begründung: "$\subseteq$" $u * U = \{u * w \mid w \in U\} \subseteq U$. ✓

"$\supseteq$" Für $x \in U$ ist stets $w := u^{-1} * x \in U$, und es folgt $x = u * w \in u * U$. ◇

Zu(a): Wegen $\Theta_U = \ker f$ für $f: M \to 2^M, x \mapsto x * U$ ist Θ_U Äquivalenzrelation.

Beachte für $(t, x) \in M \times M$: $t \Theta_U x \Leftrightarrow (t, x) \in \Theta_U \Leftrightarrow t * U = x * U$.

Also folgt für $t_1, t_2, x_1, x_2 \in M$ aus $t_1 \Theta_U x_1$ und $t_2 \Theta_U x_2$ stets $t_1 * U = x_1 * U$ und $t_2 * U = x_2 * U$. Hieraus ergibt sich:

$(t_1 * t_2) * U = t_1 * (t_2 * U) = t_1 * (x_2 * U) = t_1 * (U * x_2) = (t_1 * U) * x_2$
$= (x_1 * U) * x_2 = x_1 * (U * x_2) = x_1 * (x_2 * U) = (x_1 * x_2) * U$, woraus $(t_1 * t_2) \Theta_U (x_1 * x_2)$ folgt. ◇

Zeige noch: $[1_{\mathbb{M}}]\Theta_U = U$.

Begründung: "$\subseteq$" Sei $x \in [1_{\mathbb{M}}]\Theta_U$, d.h. $1_{\mathbb{M}} \Theta x$. Es folgt $U = 1_{\mathbb{M}} * U = x * U$, woraus sich wegen $1_{\mathbb{M}} \in U$ stets $x = x * 1_{\mathbb{M}} \in x * U = U$ ergibt.

"$\supseteq$" Sei $x \in U$. Nach ($*$) folgt $1_{\mathbb{M}} * U = U = x * U$, d.h. $x \in [1_{\mathbb{M}}]\Theta_U$.

Zu(b) Sei Θ Kongruenzrelation von $\mathbb{M}$. Für $U := [1_{\mathbb{M}}]\Theta$ ist dann $t * U = [t]\Theta = U * t$ (siehe Vorlesung 19.12.2013)

Zu zeigen bleibt: U bildet Untergruppe von $\mathbb{M}$.

Begründung: (i) Seien $u, w \in U$. Dann ist $1_{\mathbb{M}} \Theta u$ und $1_{\mathbb{M}} \Theta w$, also $1_{\mathbb{M}} = 1_{\mathbb{M}} * 1_{\mathbb{M}} \Theta u * w$, d.h. $u * w \in [1_{\mathbb{M}}]\Theta = U$.

(ii) $1_{\mathbb{M}} \in U$ wegen $1_{\mathbb{M}} \Theta 1_{\mathbb{M}}$.

(iii) Sei $u \in U$. Es folgt $1_{\mathbb{M}} \Theta u$ und wegen $u^{-1} \Theta u^{-1}$ ergibt sich $u^{-1} = u^{-1} * 1_{\mathbb{M}} \Theta u^{-1} * u = 1_{\mathbb{M}}$; also ist $1_{\mathbb{M}} \Theta u^{-1}$, d.h. $u^{-1} \in [1_{\mathbb{M}}]\Theta = U$. ◇

Ü2 Zu (a) • $r_* a$ ist <u>surjektiv</u>, da zu jedem $y \in M$ stets $x := b*y \in M$ existiert mit $(r_* a)x = a*x = a*(b*y) = (a*b)*y = e*y = y$.

• $r_* b$ ist <u>injektiv</u>, da für $t, x \in M$ aus $(r_* b)t = (r_* b)x$ stets $b*t = b*x$ und somit $t = e*t = (a*b)*t = a*(b*t) = a*(b*x) = x$ folgt.

• $c_* a$ ist <u>injektiv</u> (wegen: $t*a = x*a \Rightarrow t = (t*a)*b = (x*a)*b = x$)

• $c_* b$ ist <u>surjektiv</u> (da zu $y \in M$ stets $x := y*a$ existiert mit $(c_* b)x = x*b = (y*a)*b = y$).

Zu (b) • $(r_* a)(b*a) = a*(b*a) = (a*b)*a = e*a = a = a*e = (r_* a)e$.

$\Rightarrow \; b*a \in [e]\ker(r_* a) = \mathrm{Ker}(r_* a)$.

• $(c_* b)(b*a) = (b*a)*b = b*(a*b) = b*e = b = e*b = (c_* b)e$.

$\Rightarrow \; b*a \in [e]\ker(c_* b) = \mathrm{Ker}(c_* b)$.

Zu (c) Betrachte $t := b' * a * b$.

Dann ist $t = (b'*a)*b = e*b = b$

und $t = b'*(a*b) = b'*e = b'$.

Zu (d) • φ ist Morphismus von $\mathbb{M}$ in sich.

Begründung: Für beliebige $t, x \in M$ gilt
$\varphi t * \varphi x = (a*t*b)*(a*x*b) = a*t*\underbrace{(b*a)}_{e}*x*b$
$= a*(t*x)*b = \varphi(t*x)$, und es ist
$\varphi e = a*e*b = a*b = e$. ◇

• ψ ist Morphismus von $\mathbb{M}$ in sich (siehe oben: "$a \leftrightarrow b$")

• Es ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$.

Begründung: Für jedes $x \in M$ ist $(\psi \circ \varphi)x = \psi(\varphi x)$
$= b * \varphi x * a = b*(a*x*b)*a = (b*a)*x*(b*a) = x$
wegen $b*a = e$, d.h. es ist $(\psi \circ \varphi)x = x = \mathrm{id}_M x$. ◇

• Es ist $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$ (siehe oben: "$a \leftrightarrow b$"). □

Seite L3

(Ü3) Für beliebige $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}^P$ ist $f_\gamma(\lambda+\lambda') = (\lambda+\lambda')*\gamma$

$$= \sum_{p\in P} (\lambda+\lambda')p\cdot\gamma p = \sum_{p\in P}(\lambda p+\lambda' p)\cdot\gamma p = \sum_{p\in P}(\lambda p\cdot\gamma p+\lambda' p\cdot\gamma p)$$

$$= \sum_{p\in P} \lambda p\cdot \gamma p + \sum_{p\in P} \lambda' p \cdot\gamma p = \lambda*\gamma+\lambda'*\gamma = f_\gamma(\lambda)+f_\gamma(\lambda').$$

Außerdem ist $f_\gamma(0_P) = 0_P*\gamma = \sum_{p\in P} \underbrace{\underbrace{0_P(p)}_{0}\cdot\gamma p}_{0_V} = 0_V$. □

(Ü4) Vorüberlegung: Ist P endliche Menge und bildet M eine kommutative Gruppe, so gilt für Morphismen f und g von $\mathbb{Z}^P_{add}$ nach M stets: $f\circ\delta^P = g\circ\delta^P \iff f=g$.

Anwendung: Für die Situation von Ü4 gilt wegen $f_{\delta^P} = id_M$ und $f_\gamma\circ\delta^P=\gamma$ stets:

$$\boxed{f_\eta\circ f_\gamma = id_{\mathbb{Z}^P} \iff f_\eta\circ\gamma=\delta^P}$$

Vorgehen: Finde $\eta: P\to\mathbb{Z}^P,\ p\mapsto\eta_p$ mit $f_\eta\circ\gamma=\delta^P$ und definiere $\beta: P\times P\to\mathbb{Z},\ (p,q)\mapsto(\eta_p)q$, d.h. $\tau_\beta=\eta$.

Ausführung: $f_\eta\circ\gamma=\delta^P$ bedeutet: Für jedes $p\in P$ ist $\alpha(p,1)\cdot\eta_1+\alpha(p,2)\cdot\eta_2=\alpha(p,\cdot)*\eta=\gamma p*\eta=f_\eta(\gamma p)=(f_\eta\circ\gamma)p=\delta^P_p$, d.h. $\boxed{\begin{matrix}3\eta_1+4\eta_2=\delta^P_1\\ 2\eta_1+3\eta_2=\delta^P_2\end{matrix}}$

d.h. $\boxed{\begin{matrix}9\eta_1+12\eta_2=3\delta^P_1\\ 8\eta_1+12\eta_2=4\delta^P_2\end{matrix}}$

bzw. $\boxed{\begin{matrix}6\eta_1+8\eta_2=2\delta^P_1\\ 6\eta_1+9\eta_2=3\delta^P_2\end{matrix}}$

d.h. $\boxed{\begin{matrix}\eta_1=3\delta^P_1-4\delta^P_2\\ \eta_2=-2\delta^P_1+3\delta^P_2\end{matrix}}$ d.h. $\boxed{\beta=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2\\ \hline 1 & 3 & -4\\ 2 & -2 & 3\end{array}}$

. □

(H5) Zu(a): $\underline{12}/\ker\varphi = \{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2,6,10\},\{3,7,11\}\}$

Zu(b): $\varphi 0 = 3\cdot 0 = 0$, zu zeigen bleibt: $\varphi(x \underset{12}{+} y) = \varphi x \underset{12}{+} \varphi y$ für alle $x, y \in \underline{12}$.

Vorbereitung: Nach H5, Blatt 9 bildet $C_{12} = (12, +_{12}, 0)$ eine kommutative Gruppe. Setze $t \cdot_{12} 0 := 0$ und $t \cdot_{12} k := \underbrace{t +_{12} \cdots +_{12} t}_{k \text{ Summanden}}$ für alle $k \in \mathbb{N}_+$ und $t \in \underline{12}$.

Dann folgt sofort (*): $\boxed{t \cdot_{12} (k \underset{12}{+} l) = t \cdot_{12} (k+l) = t \cdot_{12} k +_{12} t \cdot_{12} l}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und $t \in \underline{12}$.

Behauptung: $\boxed{\varphi x = 3 \cdot_{12} x}$ für alle $x \in \underline{12}$.

Beweis: Sei $x \in \underline{12}$.

Fall $x < 4$: Dann ist $\varphi x = 3x = 3 \cdot_{12} x$. ✓

Fall $4 \leq x < 8$: Dann ist $\varphi x = 3(x-4) = 3 \cdot_{12} (x-4) +_{12} \underbrace{3 \cdot_{12} 4}_{0}$
$\overset{(*)}{=} 3 \cdot_{12} (\underbrace{(x-4)+4}_{x}) = 3 \cdot_{12} x$. ✓

Fall $8 \leq x$: Dann ist $\varphi x = 3(x-8) = 3 \cdot_{12} (x-8) +_{12} \underbrace{3 \cdot_{12} 8}_{0}$
$\overset{(*)}{=} 3 \cdot_{12} (\underbrace{(x-8)+8}_{x}) = 3 \cdot_{12} x$. ✓ ◇

Anwendung: $\varphi(x \underset{12}{+} y) = 3 \cdot_{12} (x \underset{12}{+} y) \overset{(*)}{=} 3 \cdot_{12} x +_{12} 3 \cdot_{12} y = \varphi x \underset{12}{+} \varphi y$ für alle $x, y \in \underline{12}$. □

Zu(c): Es ist $L(\varphi x = 6) = \{2, 6, 10\}$ und $L(\varphi x = 0) = \{0, 4, 8\}$ und außerdem

$2 +_{12} \{0,4,8\} = \{2 +_{12} 0, 2 +_{12} 4, 2 +_{12} 8\} = \{2, 6, 10\}$, d.h.

$2 +_{12} L(\varphi x = 0) = L(\varphi x = 6)$. □

(H6) Zu (a): • Es ist φ Morphismus.

Begründung: (1) $\varphi(0,0,0)=(0-0,0-0)=(0,0)$. ✓

(2) Für $x=(x_1,x_2,x_3)$ und $y=(y_1,y_2,y_3)$ aus $\mathbb{Z}^3$ gilt stets $\varphi(x+y)=\varphi x+\varphi y$.

Dem: Für $z:=(z_1,z_2,z_3):=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$ ist $z_1-z_2=(x_1+y_1)-(x_2+y_2)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)$ und $z_2-z_3=(x_2-x_3)+(y_2-y_3)$, woraus $\varphi(x+y)=\varphi z$ $=(z_1-z_2,\ z_2-z_3)=((x_1-x_2)+(y_1-y_2),(x_2-x_3)+(y_2-y_3))$ $=(x_1-x_2,\ x_2-x_3)+(y_1-y_2,\ y_2-y_3)=\varphi x+\varphi y$ folgt. ◇

• $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{Z}(1,1,1)$ für $\mathbb{Z}(1,1,1):=\{(t,t,t)\mid t\in\mathbb{Z}\}$

Begründung: Für $x=(x_1,x_2,x_3)$ aus $\mathbb{Z}^3$ gilt:

$x\in\operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi x=0 \iff x_1-x_2=0 \wedge x_2-x_3=0$

$\iff x_1=x_2=x_3 \iff x\in\mathbb{Z}(1,1,1)$. ◇

Zu (b): $\varphi a=\varphi(3,2,1)=(3-2,2-1)=(1,1)=b$, also ist

$L(\varphi x=b)=a+\operatorname{Ker}\varphi=a+\mathbb{Z}(1,1,1)=$

$\{(3+t,\ 2+t,\ 1+t)\mid t\in\mathbb{Z}\}$. ◇

(H7) Zu (a): • Es ist $(r_*a)\circ(r_*b)=\mathrm{id}_M$.

Begründung: Für $x\in M$ gilt stets

$[(r_*a)\circ(r_*b)]x=(r_*a)[(r_*b)x]=(r_*a)(b*x)=a*(b*x)=$

$(a*b)*x=e*x=x=\mathrm{id}_M x$. ◇

• Es ist $(r_*b)\circ(r_*a)=\mathrm{id}_M$.

Begründung analog: "$a\leftrightarrow b$". ◇

Zu (b): r_*a ist surjektiv also bijektiv (da M endlich ist).

Wegen $(r_*a)(b*a)=a*(b*a)=\underbrace{(a*b)}_{e}*a=a=a*e=(r_*a)e$

ist dann $b*a=e$. ◇

Seite L6

(H8) Wegen $\boxed{f_\eta \circ f_\gamma = id_{\mathbb{Z}^P} \Leftrightarrow f_\eta \circ \gamma = \delta^P}$

und $\boxed{f_\gamma \circ f_\eta = id_{\mathbb{Z}^P} \Leftrightarrow f_\gamma \circ \eta = \delta^P}$

zeigen wir:

(1) $f_\eta \circ \gamma = \delta^P$

Begründung: Für $p \in P$ ist $(f_\eta \circ \gamma)p = f_\eta(\gamma p) = \gamma p * \eta =$
$\alpha(p,\cdot) * \eta = \alpha(p,1)\cdot\eta 1 + \alpha(p,2)\cdot\eta 2 + \alpha(p,3)\cdot\eta 3$.

Außerdem ist $\eta 1 = \delta_1^P - 3\delta_3^P$, $\eta 2 = \delta_2^P - 2\delta_3^P$, $\eta 3 = \delta_3^P$.

Fall "$p=1$": $(f_\eta \circ \gamma)1 = 1\cdot\eta 1 + 3\cdot\eta 3 = \delta_1^P$ ✓

Fall "$p=2$": $(f_\eta \circ \gamma)2 = 1\cdot\eta 2 - 2\cdot\eta 3 = \delta_2^P$ ✓

Fall "$p=3$": $(f_\eta \circ \gamma)3 = 1\cdot\eta 3 = \delta_3^P$ ✓ $\diamond$

(2) $f_\gamma \circ \eta = \delta^P$

Begründung: Für $p \in P$ ist $(f_\gamma \circ \eta)p = \beta(p,1)\cdot\gamma 1 + \beta(p,2)\cdot\gamma 2 + \beta(p,3)\cdot\gamma 3$.

Außerdem ist $\gamma 1 = \delta_1^P + 3\delta_3^P$, $\gamma 2 = \delta_2^P + 2\delta_3^P$, $\gamma 3 = \delta_3^P$.

Fall "$p=1$": $(f_\gamma \circ \eta)1 = 1\cdot\gamma 1 - 3\cdot\gamma 3 = \delta_1^P$ ✓

Fall "$p=2$": $(f_\gamma \circ \eta)2 = 1\cdot\gamma 2 - 2\cdot\gamma 3 = \delta_2^P$ ✓

Fall "$p=3$": $(f_\gamma \circ \eta)3 = 1\cdot\gamma 3 = \delta_3^P$ ✓ . $\square$