10. Übungsblatt für die Übungen vom 6.1. bis 10.1.2014

Hausaufgaben bitte bis zum 13.1.2014 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.
Allen Studierenden ein frohes Neues Jahr!

Ü1. Für eine beliebige Menge P betrachte die kommutativen Monoide $\mathbb{L} := \mathbb{N}^P_{add} = (\mathbb{N}^P, +, 0_P)$ und $\mathbb{M} := (2^P, \cup, \varnothing)$.

Zeige, dass $\varphi : \mathbb{N}^P \to 2^P$, $\alpha \mapsto \operatorname{supp} \alpha$ ein Morphismus von $\mathbb{L}$ nach $\mathbb{M}$ ist.

Zusatzfrage: Für welche Kongruenzrelation Θ von $\mathbb{L}$ gilt $\mathbb{M} \simeq \mathbb{L}/\Theta$?

Ü2. (a) Für $P := \{\text{Dime}, \text{Dollar}\}$ und $Q := \{\text{Nickel}, \text{Quarter}\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P\times Q}$ gegeben durch die Tabelle:

	Nickel	Quarter
Dime	2	0
Dollar	10	2

Zeige, dass die ROW-MAP $\gamma := r_\mu$ zu μ unabhängig in $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $\mathbb{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist.

Zusatzfrage: Warum ist γ nicht erzeugend?

(b) Für $P := \{+, -\}$ sei $\gamma \in \mathbb{Z}^P$ gegeben durch:

x	$+$	$-$
γx	1	-1

Zeige, dass γ erzeugend für $\mathbb{Z}_{add} := (Z, +, 0)$ über $\mathbb{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist. Bestimme dazu f_γ und folgere:

$$\mathbb{N}^P_{add}/\ker(f_\gamma) \simeq \mathbb{Z}_{add}.$$

Zusatzfrage: Warum ist γ nicht unabhängig?

Ü3. Zu $P := \{\text{Dime}, \text{Quarter}, \text{Dollar}\}$ und $Q := \{\text{Nickel}, \text{Quarter}\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P\times Q}$ in Tabellenform gegeben durch:

	Nickel	Quarter
Dime	2	0
Quarter	0	1
Dollar	10	2

Zur ROW-MAP $\gamma := r_\mu$ von μ sei dann $f := f_\gamma$ die Linearkombinationsabbildung bzgl. $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $\mathbb{N}$.

Außerdem sei $\beta \in \mathbb{N}^Q$ gegeben durch:

y	Nickel	Quarter
βy	20	4

Bestimme f und finde zur Gleichung $fx = \beta$ die Lösungsmenge
$f^{-1}\{\beta\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^P | f\alpha = \beta\}$.

Ü4. Zeige für ein beliebiges Monoid $\mathbb{M} = (M, *_\mathbb{M}, 1_\mathbb{M})$, dass eine Teilmenge U von M ein Untermonoid von $\mathbb{M}$ bildet (d.h., $\forall u, w \in U(u *_\mathbb{M} w \in U) \wedge 1_\mathbb{M} \in U$) genau dann, wenn zu U ein Monoid $\mathbb{U} = (U, *_\mathbb{U}, 1_\mathbb{U})$ existiert, für welches $\mathrm{id}_{U,M} : U \to M, x \mapsto x$ ein Morphismus von $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}$ ist.

H5. Für $P := \{\mathrm{Quarter}, \mathrm{Dollar}\}$ und $Q := \{\mathrm{Nickel}, \mathrm{Dime}\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P\times Q}$ tabellarisch gegeben:

	Nickel	Dime
Quarter	2	1
Dollar	8	4

Ferner sei $\gamma := r_\mu$ die ROW-MAP zu μ und $f := f_\gamma$ die Linearkombinationsabbildung bzgl. $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $\mathbb{N}$.

Außerdem sei $\beta \in \mathbb{N}^Q$ gegeben durch::

y	Nickel	Dime
βy	20	10

Bestimme f und finde zur Gleichung $fx = \beta$ die Lösungsmenge $f^{-1}\{\beta\}$.

H6. Sei $\mathbb{M} = (M, *_\mathbb{M}, 1_\mathbb{M})$ Monoid und sei P Menge. Zeige, dass $\mathbb{L} = (L, *_\mathbb{L}, 1_\mathbb{L})$ gegeben durch $L := M^P$ und $*_\mathbb{L} : L \times L \to L$ mit

$$\begin{aligned} \alpha *_\mathbb{L} \beta : P &\to M \\ p &\mapsto \alpha p *_\mathbb{M} \beta p \end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta \in L$ sowie $1_\mathbb{L} : P \to M, p \mapsto 1_\mathbb{M}$ ein Monoid bildet.

Anmerkung: $\mathbb{L}$ heißt das P-fache Produkt von $\mathbb{M}$ und wird mit $\mathbb{M}^P$ bezeichnet.

H7. Seien $\mathbb{M}_i := (M_i, *_i, 1_i)$ für $i \in [3]$ Monoide, und seien φ von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_2$ sowie ψ von $\mathbb{M}_2$ nach $\mathbb{M}_3$ Morphismen. Begründe: $\psi \circ \varphi$ ist Morphismus von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_3$.