LAAG WiS 2013/14
ÜBUNGEN BLATT 10

Ü1 Für eine beliebige Menge P betrachte die kommutativen Monoide $\mathbb{L} := \mathbb{N}^P_{\text{add}} = (\mathbb{N}^P, +, 0_P)$ und $\mathbb{M} := (2^P, \cup, \emptyset)$.
Zeige, dass $\varphi : \mathbb{N}^P \to 2^P$, $\alpha \mapsto \operatorname{supp}\alpha$ ein Morphismus von $\mathbb{L}$ nach $\mathbb{M}$ ist.

Zusatzfrage: Für welche Kongruenzrelation Θ von $\mathbb{L}$ gilt $\boxed{\mathbb{M} \simeq \mathbb{L}/\Theta}$?

Ü2 (a) Für $P := \{\text{Dime}, \text{Dollar}\}$ und $Q := \{\text{Nickel}, \text{Quarter}\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P\times Q}$ gegeben durch die Tabelle:

	Nickel	Quarter
Dime	2	0
Dollar	10	2

Zeige, dass die ROW-MAP $\gamma := r_\mu$ zu μ unabhängig in $\mathbb{N}^Q_{\text{add}}$ über $\mathbb{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist.

Zusatzfrage: Warum ist γ nicht erzeugend?

(b) Für $P := \{+, -\}$ sei $\gamma \in \mathbb{Z}^P$ gegeben durch:

x	$+$	$-$
γx	1	-1

Zeige, dass γ erzeugend für $\mathbb{Z}_{\text{add}} := (\mathbb{Z}, +, 0)$ über $\mathbb{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist. Bestimme dazu f_γ und folgere: $\boxed{\mathbb{N}^P_{\text{add}} / \ker(f_\gamma) \simeq \mathbb{Z}_{\text{add}}}$

Zusatzfrage: Warum ist γ nicht unabhängig?

Ü3 Zu $P := \{\text{Dime}, \text{Quarter}, \text{Dollar}\}$ und $Q := \{\text{Nickel}, \text{Quarter}\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P \times Q}$ in Tabellenform gegeben durch:

	Nickel	Quarter
Dime	2	0
Quarter	0	1
Dollar	10	2

Zur ROW-MAP $\gamma := r_\mu$ von μ sei dann $f := f_\gamma$ die Linearkombinationsabbildung bzgl. $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $\mathbb{N}$.
Ausserdem sei $\beta \in \mathbb{N}^Q$ gegeben durch:

y	Nickel	Quarter
βy	20	4

Bestimme f und finde zur Gleichung $fx = \beta$ die Lösungsmenge $f^{-1}\{\beta\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^P \mid f\alpha = \beta\}$.

Ü4 Zeige für ein beliebiges Monoid $\mathbb{M} = (M, *_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}})$, dass eine Teilmenge U von M ein Untermonoid von $\mathbb{M}$ bildet (dh. $\forall u,w \in U\,(u *_{\mathbb{M}} w \in U) \wedge 1_{\mathbb{M}} \in U$) genau dann, wenn zu U ein Monoid $\mathbb{U} = (U, *_{\mathbb{U}}, 1_{\mathbb{U}})$ existiert, für welches $id_{U,M} : U \to M, x \mapsto x$ ein Morphismus von $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}$ ist.

H1 Zu $P := \{\text{Quarter}, \text{Dollar}\}$ und $Q := \{\text{Nickel}, \text{Dime}\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P \times Q}$ tabellarisch gegeben durch:

	Nickel	Dime
Quarter	2	1
Dollar	8	4

Ferner sei $\gamma := r_\mu$ die ROW-MAP zu μ und $f := f_\gamma$ die Linearkombinationsabbildung bzgl. $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $\mathbb{N}$.

Ausserdem sei $\beta \in \mathbb{N}^Q$ gegeben durch:

y	Nickel	Dime
βy	20	10

Bestimme f und finde zur Gleichung $fx = \beta$ die Lösungsmenge $f^{-1}\{\beta\}$.

H2 Sei $\mathbb{M} = (M, *_\mathbb{M}, 1_\mathbb{M})$ Monoid und sei P Menge. Zeige, dass $\mathbb{L} := (L, *_\mathbb{L}, 1_\mathbb{L})$ gegeben durch $L := M^P$ und $*_\mathbb{L} : L \times L \to L$ mit

$$\alpha *_\mathbb{L} \beta : P \to M,\ p \mapsto \alpha p *_\mathbb{M} \beta p$$

für alle $\alpha, \beta \in L$ sowie $1_\mathbb{L} : P \to M,\ p \mapsto 1_\mathbb{M}$ ein Monoid bildet.

Anmerkung: $\mathbb{L}$ heißt das P-fache Produkt von $\mathbb{M}$ und wird mit $\mathbb{M}^P$ bezeichnet.

H3 Seien $\mathbb{M}_i := (M_i, *_i, 1_i)$ für $i \in [3]$ Monoide, und seien φ von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_2$ sowie ψ von $\mathbb{M}_2$ nach $\mathbb{M}_3$ Morphismen.
Begründe: $\psi \circ \varphi$ ist Morphismus von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_3$.