LAAG WiS 2013/14

LÖSUNGEN BLATT 10

Ü1 (1) $\operatorname{supp} 0_P = \{p \in P \mid 0 = 0_P(p) \neq 0\} = \emptyset$

(2) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^P$ gilt $\operatorname{supp}(\alpha+\beta) = \operatorname{supp}\alpha \cup \operatorname{supp}\beta$.

Begründung: Für alle $p \in P$ gilt: $p \in \operatorname{supp}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow (\alpha+\beta)p \neq 0$
$\Leftrightarrow \alpha p + \beta p \neq 0 \Leftrightarrow \alpha p \neq 0 \vee \beta p \neq 0 \Leftrightarrow p \in \operatorname{supp}\alpha \vee p \in \operatorname{supp}\beta$
$\Leftrightarrow p \in \operatorname{supp}\alpha \cup \operatorname{supp}\beta$.

(3) Für $\Theta := \ker\varphi$ gilt $\mathbb{M} \simeq \mathbb{L}/\Theta$, da φ surjektiv und

$\mathbb{L}/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$.

Ü2(a) Für $\alpha \in \mathbb{N}^P$ ist $f_\gamma\alpha = \alpha_{Dime}\cdot\gamma_{Dime} + \alpha_{Dollar}\cdot\gamma_{Dollar}$

$$= \alpha_{Dime}\cdot 2\delta^Q_{Nichel} + \alpha_{Dollar}\cdot(10\delta^Q_{Nichel} + 2\delta^Q_{Quarter})$$
$$= (\alpha_{Dime}\cdot 2 + \alpha_{Dollar}\cdot 10)\cdot\delta^Q_{Nichel} + \alpha_{Dollar}\cdot 2\cdot\delta^Q_{Quarter}.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^P$ mit $f_\gamma\alpha = f_\gamma\beta$ folgt also:

$\alpha_{Dime}\cdot 2 + \alpha_{Dollar}\cdot 10 = \beta_{Dime}\cdot 2 + \beta_{Dollar}\cdot 10$ und

$\alpha_{Dollar}\cdot 2 = \beta_{Dollar}\cdot 2$, dh. $\alpha_{Dollar} = \beta_{Dollar}$

und also $\alpha_{Dime}\cdot 2 = \beta_{Dime}\cdot 2$, dh. $\alpha_{Dime} = \beta_{Dime}$,

woraus sich $\alpha = \beta$ ergibt. Somit ist f_γ injektiv,

dh. γ ist unabhängig.

γ erzeugt z.B. nicht δ^Q_{Nichel}.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha^{(n)}: P \to \mathbb{N}$ mit $+ \mapsto n$ und $- \mapsto 0$

sowie $\beta^{(n)}: P \to \mathbb{N}$ mit $+ \mapsto 0$ und $- \mapsto n$ (vgl. Vorlesung).

Dann ist $f_\gamma(\alpha^{(n)}) = n\cdot 1 + 0\cdot(-1) = n$ und

$$f_\gamma(\beta^{(n)}) = 0\cdot 1 + n\cdot(-1) = -n,$$

woraus folgt, dass f_γ surjektiv ist, dh. γ ist erzeugend.

f_γ ist nicht injektiv, da $f(\delta^P_+ + \delta^P_-) = 1 + (-1) = 0 = f(0_P)$

gilt, dh. γ ist nicht unabhängig.

Ü3 Für $\alpha \in \mathbb{N}^P$ ist $f\alpha = \alpha_{\text{Dime}} \cdot \gamma_{\text{Dime}} + \alpha_{\text{Quarter}} \cdot \gamma_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot \gamma_{\text{Dollar}}$

$= \alpha_{\text{Dime}} \cdot 2\delta^Q_{\text{Nickel}} + \alpha_{\text{Quarter}} \cdot \delta^Q_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot (10\delta^Q_{\text{Nickel}} + 2\delta^Q_{\text{Quarter}})$

$= (\alpha_{\text{Dime}} \cdot 2 + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot 10) \cdot \delta^Q_{\text{Nickel}} + (\alpha_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot 2) \cdot \delta^Q_{\text{Quarter}}$.

Wegen $\beta = 20\delta^Q_{\text{Nickel}} + 4\delta^Q_{\text{Quarter}}$ folgt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^P$:

$$\alpha \in f^{-1}\{\beta\} \Leftrightarrow f\alpha = \beta \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha_{\text{Dime}} \cdot 2 + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot 10 = 20 \wedge \\ \alpha_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot 2 = 4 \end{array}}$$

Daher gilt: $f^{-1}\{\beta\} = \{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ mit

x	Dime	Quarter	Dollar
$\alpha^1 x$	0	0	2
$\alpha^2 x$	5	2	1
$\alpha^3 x$	10	4	0

Ü4 (1) Bilde U Untermonoid von $\mathbb{M}$. Setze $*_{\mathbb{U}} := *_{\mathbb{M}} | (U \times U \to U)$ und $1_{\mathbb{U}} := 1_{\mathbb{M}}$. Dann ist $\mathbb{U} := (U, *_{\mathbb{U}}, 1_{\mathbb{U}})$ Monoid und $id_{U,M}$ ist Morphismus von $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}$.

(2) Sei $\mathbb{U} = (U, *_{\mathbb{U}}, 1_{\mathbb{U}})$ Monoid und $\varphi := id_{U,M}$ Morphismus von $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}$. Dann ist für $u, w \in U$ stets $u *_{\mathbb{U}} w = \varphi(u *_{\mathbb{U}} w) = \varphi u *_{\mathbb{M}} \varphi w = u *_{\mathbb{M}} w$, d.h., $u *_{\mathbb{M}} w = u *_{\mathbb{U}} w \in U$ und $1_{\mathbb{M}} = \varphi 1_{\mathbb{U}} = 1_{\mathbb{U}} \in U$.

(H1) Für $\alpha \in \mathbb{N}^Q$ ist $f\alpha = \alpha_{\text{Quarter}} \cdot \gamma_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot \gamma_{\text{Dollar}}$
$= \alpha_{\text{Quarter}} \cdot (2\delta^Q_{\text{Nickel}} + \delta^Q_{\text{Dime}}) + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot (8\delta^Q_{\text{Nickel}} + 4\delta^Q_{\text{Dime}})$
$= (\alpha_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot 4) \cdot (2\delta^Q_{\text{Nickel}} + \delta^Q_{\text{Dime}})$; wegen
$\beta = 20\delta^Q_{\text{Nickel}} + 10\delta^Q_{\text{Dime}}$ folgt :
$\alpha \in f^{-1}\{\beta\} \Leftrightarrow f\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha_{\text{Quarter}} + \alpha_{\text{Dollar}} \cdot 4 = 10 \Leftrightarrow$
$\alpha \in \{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ für

x	Quarter	Dollar
$\alpha^1 x$	2	2
$\alpha^2 x$	6	1
$\alpha^3 x$	10	0

(H2) (1) Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in L$ gilt :
$$(\alpha *_{\mathbb{L}} \beta) *_{\mathbb{L}} \gamma = \alpha *_{\mathbb{L}} (\beta *_{\mathbb{L}} \gamma) .$$
Begründung : Für alle $p \in P$ ist $[(\alpha *_{\mathbb{L}} \beta) *_{\mathbb{L}} \gamma] p =$
$(\alpha *_{\mathbb{L}} \beta) p *_{\mathbb{M}} \gamma p = (\alpha p *_{\mathbb{M}} \beta p) *_{\mathbb{M}} \gamma p = \alpha p *_{\mathbb{M}} (\beta p *_{\mathbb{M}} \gamma p)$
$= \alpha p *_{\mathbb{M}} (\beta *_{\mathbb{L}} \gamma) p = [\alpha *_{\mathbb{L}} (\beta *_{\mathbb{L}} \gamma)] p$.

(2) Für alle $\alpha \in L$ gilt : $\alpha *_{\mathbb{L}} 1_{\mathbb{L}} = \alpha = 1_{\mathbb{L}} *_{\mathbb{L}} \alpha$.
Begründung : Für alle $p \in P$ ist $(\alpha *_{\mathbb{L}} 1_{\mathbb{L}}) p =$
$\alpha p *_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{L}}(p) = \alpha p *_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}} = \alpha p = 1_{\mathbb{M}} * \alpha p =$
$1_{\mathbb{L}}(p) *_{\mathbb{M}} \alpha p = (1_{\mathbb{L}} *_{\mathbb{L}} \alpha) p$.

(H3) Setze $\eta := \psi \circ \varphi$.
(1) Für alle $\alpha, \beta \in M_1$ gilt $\eta(\alpha *_1 \beta) = \eta\alpha *_3 \eta\beta$.
Begründung : $\eta(\alpha *_1 \beta) = \psi(\varphi(\alpha *_1 \beta)) =$
$\psi(\varphi\alpha *_2 \varphi\beta) = \psi(\varphi\alpha) *_3 \psi(\varphi\beta) = \eta\alpha *_3 \eta\beta$.
(2) Es ist $\eta(1_1) = 1_3$.
Begründung : $\eta(1_1) = \psi(\varphi(1_1)) = \psi(1_2) = 1_3$.