LAAG Blatt 9

Ü1 Sei $M = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \text{Zitrone}, \text{Banane}\}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^M$ seien gegeben durch

x	Apfel	Birne	Zitrone	Banane
αx	5	3	2	0
βx	0	6	1	4

(i) ~~Best~~ Bestimme $\alpha+\beta$, $\alpha \vee \beta$ und $\alpha \wedge \beta$.

(ii) Gib $\operatorname{supp}\alpha$ und $\operatorname{supp}\beta$ an.

(iii) Begründe für beliebiges $\eta \in \mathbb{N}^M$ die Formel $\eta = \sum_{x \in M} \eta x \cdot \delta_x^M$ und stelle α sowie β in dieser Form dar.

LÖSUNG (i)

x	Apfel	Birne	Zitrone	Banane
$(\alpha+\beta)x$	5	9	3	4
$(\alpha\vee\beta)x$	5	6	2	4
$(\alpha\wedge\beta)x$	0	3	1	0

(ii) $\operatorname{supp}\alpha = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \text{Zitrone}\}$
$\operatorname{supp}\beta = \{\text{Birne}, \text{Zitrone}, \text{Banane}\}$.

(iii)
$$\eta(\text{Apfel}) = \eta(\text{Apfel}) \cdot \underbrace{\delta^M_{\text{Apfel}}(\text{Apfel})}_{1} + \eta(\text{Birne}) \cdot \underbrace{\delta^M_{\text{Birne}}(\text{Apfel})}_{0}$$
$$+\, \eta(\text{Zitrone}) \cdot \underbrace{\delta^M_{\text{Zitrone}}(\text{Apfel})}_{0} + \eta(\text{Banane}) \cdot \underbrace{\delta^M_{\text{Banane}}(\text{Apfel})}_{0}$$

$$\alpha = 5 \cdot \delta^M_{\text{Apfel}} + 3 \cdot \delta^M_{\text{Birne}} + 2 \cdot \delta^M_{\text{Zitrone}}$$
$$\beta = 6 \cdot \delta^M_{\text{Birne}} + 1 \cdot \delta^M_{\text{Zitrone}} + 4 \cdot \delta^M_{\text{Banane}}$$

Ü2 Sei $\mathbb{N}_{add} = (\mathbb{N}, +, 0)$ das additive Monoid der natürlichen Zahlen; bezeichne $a \wedge b$ das Minimum von $a, b \in \mathbb{N}$.

Für $T_3 := (\underline{3}, +^3, 0)$ mit $x +^3 y := (x+y) \wedge 2$ für alle $x, y \in \underline{3}$ und $\varphi : \mathbb{N} \to \underline{3}$, $x \mapsto x \wedge 2$

zeige:

(i) $\varphi 0 = 0$

(ii) $\varphi(x+y) = \varphi x +^3 \varphi y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Folgere hieraus, dass T_3 Monoid ist.
Wir nennen T_3 das "0-1-viele Monoid". Warum?

<u>LÖSUNG</u> (i) ist klar wegen $\varphi 0 = 0 \wedge 2 = 0$.

(ii) ist klar für $x = 0$ oder $y = 0$ wegen
$\varphi(0+y) = \varphi y = 0 +^3 \varphi y = \varphi 0 +^3 \varphi y$.
Seien nun $x, y \in \mathbb{N}_+$. Dann folgt $\varphi x, \varphi y \in \mathbb{N}_+$, und wir erhalten $\varphi(x+y) = (x+y) \wedge 2 = 2$ sowie $2 \leq \varphi x + \varphi y$, woraus $\varphi x +^3 \varphi y = (\varphi x + \varphi y) \wedge 2 = 2$ folgt. Ergebnis: $\varphi(x+y) = 2 = \varphi x +^3 \varphi y$.

T_3 ist Monoid! Begründung: Zu zeigen bleibt die Assoziativität von $+^3$. Für alle $x, y, z \in \underline{3}$ gilt (da $\varphi a = a$ für jedes $a \in \underline{3}$):

$$(x +^3 y) +^3 z = (\varphi x +^3 \varphi y) +^3 \varphi z \overset{(ii)}{=} \varphi(x+y) +^3 \varphi z \overset{(ii)}{=}$$
$$\varphi((x+y)+z) \underset{\text{Ass. in } \mathbb{N}_{add}}{=} \varphi(x+(y+z)) = \ldots = x +^3 (y +^3 z). \quad \square$$

Begründung "0-1-viele Monoid": 2 =: viele, dann:

0 plus x = x
x plus viele = viele
1 plus 1 = viele

Ü3 Ist P Menge, so sind $\mathbb{A}_P := (2^P, \cup, \emptyset)$ und $\mathbb{A}_P^* := (2^P, \cap, P)$ natürlich geordnete kommutative Monoide.

(i) Bestimme die natürliche Ordnung zunächst von $\mathbb{A}_P$ und dann von $\mathbb{A}_P^*$.

(ii) Finde eine bijektive Abbildung $\varphi : 2^P \to 2^P$ derart, dass gilt:

- $\varphi(X \cup Y) = \varphi X \cap \varphi Y$ für alle $X, Y \in 2^P$
- $\varphi \emptyset = P$,

LÖSUNG (i) $X \leq Y :\Leftrightarrow \exists Z \in 2^P : X \cup Z = Y$ für alle $X, Y \in 2^P$.

Dann: $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$.

Denn: Ist $X \subseteq Y$, so gilt $X \cup Y = Y$.

Analog ist "$X \supseteq Y$" die natürliche Ordnung auf $\mathbb{A}_P^*$.

(ii) $\varphi : 2^P \to 2^P$, $X \mapsto P - X$ ist die gesuchte Abbildung.

Ü34 ~~Berechne~~ Sei $P := \{\text{Dime}, \text{Quarter}, \text{Dollar}\}$

und sei $\gamma : P \to \mathbb{N}$ gegeben durch

x	Dime	Quarter	Dollar
γx	10	25	100

(i) Bestimme $f_\gamma : \mathbb{N}^P \to \mathbb{N}$, $\alpha \mapsto \sum_{p \in P} \alpha p \cdot \gamma p$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^P$ mit

x	Dime	Quarter	Dollar
αx	2	3	3
βx	7	5	2

und zeige $(\alpha, \beta) \in \ker(f_\gamma)$.

<u>LÖSUNG</u>: $f_\gamma \alpha = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 100 = 395$

$f_\gamma \beta = 7 \cdot 10 + 5 \cdot 25 + 2 \cdot 100 = 395$

Also ist $f_\gamma \alpha = 395 = f_\gamma \beta$, d.h. $(\alpha, \beta) \in \ker(f_\gamma)$.

(ii) Begründe: $f_\gamma(0_P) = 0$ und

$f_\gamma(\alpha + \beta) = f_\gamma(\alpha) + f_\gamma(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^P$

(iii) Überprüfe: $f_\gamma \circ \delta^P = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\delta^P"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\ \mathbb{N}^P \arrow[rr, "f_\gamma"'] & {} & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

H1 "Die Uhr als Monoid"

Sei $C_{12} := (\underline{12}, +_{12}, 0)$ mit

$$x +_{12} y := \begin{cases} x+y & \text{falls } x+y < 12 \\ x+y-12 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x, y \in \underline{12}$.

(i) Bestimme zu $x \in \underline{12}$ das Inverse in C_{12}.

(ii) Sind $x, y, z \in \underline{12}$ und $t := x+y+z \in \mathbb{N}$, so begründe:

$$(x +_{12} y) +_{12} z = \begin{cases} t & \text{falls } t < 12 \\ t-12 & \text{falls } 12 \leq t < 24 \\ t-24 & \text{sonst} \end{cases}$$

Folgere hieraus das Assoziativgesetz für $+_{12}$.

LÖSUNG (i) Zu $x \in \underline{12}$ ist $12-x$ das Inverse in C_{12}.

(ii) Ist $t < 12$, so ist $(x +_{12} y) +_{12} z = x+y+z = t$ nach Definition von $+_{12}$.

Fall $12 \leq t < 24$: (a) $x+y < 12$. Wegen $12 \leq t = (x+y)+z$ folgt dann:

$(x +_{12} y) +_{12} = (x+y) +_{12} z = (x+y)+z-12 = t-12$.

(b) $x+y \geq 12$. Wegen $t < 24$ ist dann $(x+y-12)+z < 12$. Es folgt $(x +_{12} y) +_{12} z = (x+y-12)+z = t-12$.

Fall $t \geq 24$: Dann ist $x+y \geq 12$ und $(x+y-12)+z \geq 12$. Es folgt $(x +_{12} y) +_{12} z = (x+y-12)+z-12 = t-24$.

H2 Verwende die "Linearkombinationsabbildung" f_γ aus Ü4.

(i) Bestimme $f_\gamma^{-1}\{x\}$ für jedes $x \in \{0, 1, 10, 100\}$.

(ii) Gib $[\alpha]\ker(f_\gamma)$ für $\alpha = \delta^P_{Dime} + \delta^P_{Quarter} + \delta^P_{Dollar}$ an.

LÖSUNG (i)

x	$f_\gamma^{-1}\{x\}$
0	$\{0_P\}$
1	$\emptyset$
10	$\{\delta^P_{Dime}\}$
100	$\{\delta^P_{Dollar}, 4\delta^P_{Quarter}, 5\delta^P_{Dime} + 2\delta^P_{Quarter}, 10\delta^P_{Dime}\}$

(ii) $[\alpha]\ker(f_\gamma) =$

$\{\delta_{Dime} + \delta_{Quarter} + \delta_{Dollar}, \delta_{Dime} + 5\delta_{Quarter},$

$6\delta_{Dime} + 3\delta_{Quarter}, 11\delta_{Dime} + \delta_{Quarter}\}$

H3 "Cayley-Darstellung von Monoiden"

Sei $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ kommutatives Monoid und sei $\mathbb{M}\mathrm{ap}\, M := (M^M, \circ, id_M)$ das (kontravariante) volle Abbildungsmonoid zu M.

Dann sei $+: M \times M \to M$ als Daten-Matrix aufgefaßt mit $r_+ : M \to M^M$, $x \mapsto +(x, \cdot)$ als zugehöriger ROW-MAP, d.h.

$$(r_+ x)t = +(x,t) = x + t$$

für alle $x, t \in M$.

Zeige: (i) r_+ ist injektiv.

(ii) $r_+ 0 = id_M$

(iii) $r_+(x+y) = r_+ x \circ r_+ y$ für alle $x, y \in M$.

Zusatzfrage: Benötigen wir, dass $\mathbb{M}$ kommutativ ist?

<u>LÖSUNG</u> (i) $r_+ x = r_+ y \Rightarrow x = x + 0 = (r_+ x)0 = (r_+ y)0 = y$.

(ii) $(r_+ 0)x = 0 + x = x = id_M\, x$ für alle $x \in M$.

(iii) Für jedes $t \in M$ gilt:

$$(r_+(x+y))t = (x+y)+t = x+(y+t) =$$
$$(r_+ x)(y+t) = (r_+ x)\big((r_+ y)t\big) = (r_+ x \circ r_+ y)t.$$

Kommutativität wird <u>nicht</u> benötigt. Also gilt die Aussage für beliebige Monoide.

H4 (nicht gestellt)

Ist P Menge und $\varphi : 2^P \to \mathbb{N}^P$ Abbildung, die jedem $T \in 2^P$ gerade

$$\varphi T : P \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnet. Bestimme $\varphi\emptyset$ und φP.

Dann gilt für alle $X, Y \in 2^P$:

(i) $\operatorname{supp}(\varphi X) = X$ und

(ii) $X \subseteq Y \iff \varphi X \leq \varphi Y$.

(iii) $\varphi(X \cup Y) = \varphi X \vee \varphi Y$

(iv) $\varphi(X \cap Y) = \varphi X \wedge \varphi Y$.

Zeige diese Aussagen allgemein; wenn dies zu schwer sein sollte, genügt die Begründung im Falle $P = [2]$.

Zusatzaufgabe: Begründe für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^P$ folgendes:

$$\operatorname{supp}(\alpha + \beta) = \operatorname{supp}(\alpha \vee \beta) = \operatorname{supp}\alpha \cup \operatorname{supp}\beta.$$