7. Übungsblatt für die Übungen vom 9.12. bis 16.12.2013

Hausaufgaben bitte bis zum 16.12.2013 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Ist M Menge und $\mathcal{R} = (P, R)$ geordnete Menge, so ist auch $\mathcal{R}^M = (P^M, R_M)$ mit

$$R_M := \{(\alpha, \beta) \in P^M \times P^M | \forall x \in M(\alpha x R \beta x)\}$$

geordnete Menge. Warum ist das so?

Ü2. Gegeben sei die Daten-Matrix

$$\begin{aligned} \alpha : [3] \times [4] &\to \mathbb{N} \\ (i, j) &\mapsto i^2 + j. \end{aligned}$$

(a) Stelle α und α^T als Tabelle dar.

(b) Bestimme $r_\alpha 1 = \alpha(1, \cdot)$ und $c_\alpha 1 = \alpha(\cdot, 1)$.

Ü3. Seien P, Q, S Mengen und sei $\alpha \in S^{P \times Q}$.

Zeige:

(a) $r_\alpha = c_{\alpha^T}$

(b) $r_{\alpha^T} = c_\alpha$

Ü4. Ist M Menge und $\varphi : S \to T$ injektive Abbildung, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : S^M &\to T^M \\ \alpha &\mapsto \varphi \circ \alpha \end{aligned}$$

ebenfalls injektiv. Begründe dies!

Ü5. Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m \leq n \iff \exists k \in \mathbb{N} : m + k = n.$$

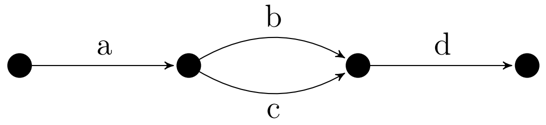
Ist M Menge, so ist $(\mathbb{N}^M, \leq_M) = (\mathbb{N}, \leq)^M$ gemäß Ü1 geordnete Menge.

Zeige für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^M$:

$$\alpha \leq_M \beta \iff \exists \gamma \in \mathbb{N}^M : \alpha + \gamma = \beta.$$

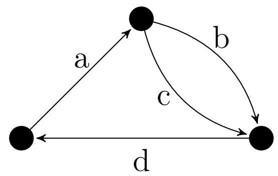
H6. Ist $G = (V, G, \sigma, \tau)$ ein Netzwerk, so nennt man $(x, y) \in E^2$ mit $\tau x = \sigma y$ einen Pfad der Länge 2 in G. Entsprechend ist (x, y, z) mit $\tau x = \sigma y$ und $\tau y = \sigma z$ ein Pfad der Länge 3 in G.

(a) Für das Netzwerk



bestimme die Pfade der Länge 2.

(b) Für das Netzwerk



bestimme die Pfade der Länge 3.

H7. Verwende Ü4 und finde eine injektive Abbildung

$$\Phi : \underline{2}^M \to \mathbb{N}^M.$$

Zusatzaufgabe: Zeige durch Angabe einer injektiven Abbildung von 2^M nach $\mathbb{N}^M$, dass jede Teilmenge von M als natürliche Multimenge zu M interpretierbar ist.

H8. Begründe: Ist S Menge und $\psi : A \to B$ surjektive Abbildung, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : S^B &\to S^A \\ u &\mapsto u \circ \psi \end{aligned}$$

injektiv.