LAAG WiS 2013/14

LÖSUNGEN BLATT 8

Ü1 Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in P^M$ gilt:

(1) $\alpha R_M \alpha$

Begründung: $\forall x \in P\, (\alpha x\, R\, \alpha x)$. $\diamond$

(2) $\alpha R_M \beta \wedge \beta R_M \gamma \Rightarrow \alpha R_M \gamma$.

Begründung: $\alpha R_M \beta \wedge \beta R_M \gamma \Rightarrow$

$\forall x \in M\, (\alpha x\, R\, \beta x) \wedge \forall x \in M\, (\beta x\, R\, \gamma x) \Rightarrow$

$\forall x \in M\, (\alpha x\, R\, \beta x \wedge \beta x\, R\, \gamma x) \Rightarrow$

$\forall x \in M\, (\alpha x\, R\, \gamma x) \Rightarrow \alpha R_M \gamma$. $\diamond$

(3) $\alpha R_M \beta \wedge \beta R_M \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$.

Begründung: $\alpha R_M \beta \wedge \beta R_M \alpha \Rightarrow$

$\forall x \in M\, (\alpha x\, R\, \beta x) \wedge \forall x \in M\, (\beta x\, R\, \alpha x) \Rightarrow$

$\forall x \in M\, (\alpha x\, R\, \beta x \wedge \beta x\, R\, \alpha x) \Rightarrow$

$\forall x \in M\, (\alpha x = \beta x) \Rightarrow \alpha = \beta$. $\diamond$

Ü2 (i)

α als Tabelle:

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	5	6	7	8
3	10	11	12	13

α^T als Tabelle:

	1	2	3
1	2	5	10
2	3	6	11
3	4	7	12
4	5	8	13

(ii)

q	1	2	3	4
$\alpha(1,q)$	2	3	4	5

beschreibt $r_\alpha 1$

&

p	$\alpha(p,1)$
1	2
2	5
3	10

beschreibt $c_\alpha 1$

LAAG WiS 2013/14
LÖSUNGEN BLATT 8

Ü3 (i) $r_\alpha = c_{\alpha^T}$

Begründung: $\forall p \in P \left(r_\alpha p = \alpha(p,\cdot) = \alpha^T(\cdot,p) = c_{\alpha^T} p \right)$. ◇

(ii) Wegen $(\alpha^T)^T = \alpha$ folgt mit (i) bereits $r_{\alpha^T} = c_{(\alpha^T)^T} = c_\alpha$. ◇

Ü4 Für beliebige $\alpha, \beta \in S^M$ gilt:

$\Phi\alpha = \Phi\beta \Rightarrow \varphi\circ\alpha = \varphi\circ\beta \Rightarrow \forall x\in M\,((\varphi\circ\alpha)x = (\varphi\circ\beta)x)$

$\Rightarrow \forall x\in M\,(\varphi(\alpha x) = \varphi(\beta x)) \Rightarrow \forall x\in M\,(\alpha x = \beta x) \Rightarrow \alpha = \beta$. ◇

Ü5 $\alpha \leq_M \beta \Leftrightarrow \forall x\in M\,(\alpha x \leq \beta x) \Leftrightarrow \forall x\in M\, \exists \gamma x\in \mathbb{N} : (\alpha x + \gamma x = \beta x)$

$\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{N}^M\,(\alpha + \gamma = \beta)$. ◇

H1 (i) $\{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d)\}$

(ii) $\{(a,b,d), (a,c,d), (b,d,a), (c,d,a), (d,a,b), (d,a,c)\}$

H2 $\varphi : \underline{2} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x$ ist injektiv (d.h. $\varphi = id_{\underline{2},\mathbb{N}}$).

Folglich ist $\Phi : \underline{2}^M \to \mathbb{N}^M,\ \alpha \mapsto \varphi\circ\alpha$ injektiv

(nach Ü4).

Zusatz Aufgabe: $\chi^M : 2^M \to \mathbb{N}^M,\ T \mapsto \chi_T^M$ mit

$$\chi_T^M : M \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist injektive Abbildung von 2^M nach $\mathbb{N}^M$.

H3 Für beliebige $u, w \in S^B$ gilt:

$\Psi u = \Psi w \Rightarrow u\circ\psi = w\circ\psi \Rightarrow \forall y\in B\,((u\circ\psi)y = (w\circ\psi)y)$

$\Rightarrow \forall y\in B\,(u(\psi y) = w(\psi y)) \Rightarrow \forall x\in A\,(ux = wx) \Rightarrow u = w$. ◇