7. Übungsblatt für die Übungen vom 2.12. bis 9.12.2013

Hausaufgaben bitte bis zum 9.12.2013 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. (a) Auf [6] sei eine Äquivalenzrelation als Kreuztabelle in folgender "Blockform" gegeben:

	1	2	3	4	5	6
1	×					
2		×	×	×		
3		×	×	×		
4		×	×	×		
5					×	×
6					×	×

Bestimme die zugehörige Partition von [6].

(b) Zur Partition $\mathcal{S} = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$ von [7] gib die zugehörige Äquivalenzrelation in Form einer Kreuztabelle an.

(c) Gib zur Äquivalenzrelation $R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup S_3 \times S_3$ mit $S_1 = \{1,2,4\}$, $S_2 = \{3,5\}$ und $S_3 = \{6\}$ auf [6] die zugehörige Kreuztabelle an.

(d) Auf $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ sei eine Äquivalenzrelation R als Kreuztabelle in folgender Form gegeben:

	a	b	c	d	e	f	g
a	×		×				
b		×					
c	×		×				
d				×		×	×
e					×		
f				×		×	×
g				×		×	×

i. Gib eine Beschreibung von R in der Form $R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup \cdots$ an.

ii. Stelle R als Kreuztabelle in "Blockform" gemäß (a) dar (durch Umordnen von A).

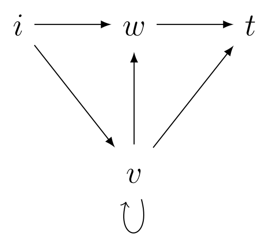
Ü2. (a) Zur natürlichen Ordnungsrelation $R := \{(i, j) \in [5] \times [5] \mid i \leq j\}$ auf $[5]$ gib diejenige Kreuztabelle an, für welche kein Kreuz unterhalb der Diagonalen liegt.

(b) Die Kreuztabelle zur Teilerordnung auf der Menge $A = \{12, 18, 2, 3, 6\}$ ist gegeben durch:

	12	18	2	3	6
12	×				
18		×			
2	×	×	×		×
3	×	×		×	×
6	×	×			×

Ordne die Elemente von A derart um, dass unterhalb der Diagonalen (der Kreuztabelle) kein Kreuz liegt.

H3. (a) Stelle folgendes Netzwerk als Kreuztabelle dar:



(b) Stelle folgende Kreuztabelle als Netzwerk dar:

	p	v	w	q
p		×	×	
v				×
w				×
q	×			

H4. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so sei der Graph von f definiert als Inzidenzstruktur $\mathcal{I}_f := (A, B, I_f)$ mit

$$I_f := \{(a, b) \in A \times B | fa = b\}.$$

Bestimme zu $\mathcal{I}_f$ die Büschelabbildung

$$A \to 2^B, \quad a \mapsto aI_f$$

und auch die Spurabbildung

$$B \to 2^A, \quad b \mapsto I_f b.$$

H5. Sei $\mathcal{S}$ Partition einer Menge A (d.h., $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ mit $\emptyset \notin \mathcal{S}$ und $\forall x \in A$ $\exists! S \in \mathcal{S} : x \in S$).

Dann sei die *Partitionsabbildung* zu $\mathcal{S}$ definiert durch $\pi_{\mathcal{S}} : A \to \mathcal{S}$ via $a \mapsto S$ mit $a \in S$.

Zeige:

(a) Ist $R \in EqA$, so gilt:

$$\ker(\pi_{A/R}) = R.$$

(b) Ist $f : A \to B$ Abbildung, so ist

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A/\ker(f) &\to fA \\ [a]\ker(f) &\mapsto fa \end{aligned}$$

wohldefiniert, und es gilt

$$f = id_{fA,B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{A/\ker(f)},$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{A/\ker(f)}"'] & B \\ A/\ker(f) \arrow[r, "\tilde{f}"'] & fA \arrow[u, "\mathrm{id}_{fA,B}"'] \end{tikzcd}$$