LAAG WiS 2013/14 – TU DRESDEN

ÜBUNGEN BLATT 7

Ü1 (a) Auf [6] sei eine ÄquivalenzRelation als Kreuztabelle in folgender "Blockform" gegeben:

	1	2	3	4	5	6
1	×					
2		×	×	×		
3		×	×	×		
4		×	×	×		
5					×	×
6					×	×

Bestimme die zugehörige Partition von [6].

(b) Zur Partition $\mathcal{S} = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$ von [7] gebe die zugehörige ÄquivalenzRelation in Form einer Kreuztabelle an.

(c) Gib zur ÄquivalenzRelation $R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup S_3 \times S_3$ mit $S_1 = \{1,2,4\}$, $S_2 = \{3,5\}$ und $S_3 = \{6\}$ auf [6] die zugehörige Kreuztabelle an.

(d) Auf $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ sei eine Äquivalenz-Relation R als Kreuztabelle in folgender Form gegeben:

	a	b	c	d	e	f	g
a	×		×				
b		×					
c	×		×				
d				×		×	×
e					×		
f				×		×	×
g				×		×	×

(d1) Gib eine Beschreibung von R in der Form $R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup \ldots$ an.

(d2) Stelle R als Kreuztabelle in "Blockform" gemäß (a) dar (durch Umordnen von A).

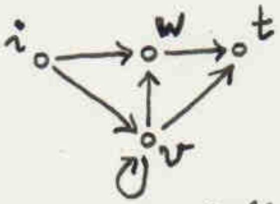
Ü2 (a) Zur natürlichen OrdnungsRelation $R := \{(i,j) \in [5] \times [5] \mid i \leq j\}$ auf $[5]$ gebe diejenige Kreuztabelle an, für welche kein Kreuz unterhalb der Diagonale liegt.

(b) Die Kreuztabelle zur Teilerordnung auf der Menge $A = \{12, 18, 2, 3, 6\}$ ist gegeben durch:

	12	18	2	3	6
12	×				
18		×			
2	×	×	×		×
3	×	×		×	×
6	×	×			×

Ordne die Elemente von A derart um, dass unterhalb der Diagonale (der Kreuztabelle) kein Kreuz liegt.

H1 (a) Stelle folgendes Netzwerk als Kreuztabelle dar:



(b) Stelle folgende Kreuztabelle als Netzwerk dar:

	p	v	w	q
p		×	×	
v				×
w				×
q	×			

H2 Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so sei der Graph von f definiert als Inzidenzstruktur $\mathbb{J}_f := (A, B, I_f)$ mit $I_f := \{(a,b) \in A \times B \mid fa = b\}$.

Bestimme zu $\mathbb{J}_f$ die BüschelAbbildung

$$A \to 2^B, \; a \mapsto aI_f$$

und auch die SpurAbbildung

$$B \to 2^A, \; b \mapsto I_f b \; .$$

(H3) (a) Sei $\mathcal{S}$ Partition einer Menge A
(d.h. $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ mit $\emptyset \notin \mathcal{S}$ und
$\forall x \in A \ \exists! \, S \in \mathcal{S} : x \in S$).
Dann sei die Partitions<u>Abbildung</u>
zu $\mathcal{S}$ definiert durch $\pi_{\mathcal{S}} : A \to \mathcal{S}$
via $a \xmapsto{\pi_{\mathcal{S}}} S$ mit $a \in S$.

Zeige: (a) Ist $R \in \mathrm{Eq}\, A$, so gilt:

$$\ker(\pi_{A/R}) = R$$

(b) Ist $f : A \to B$ Abbildung,
so ist
$\tilde{f} : A/\ker(f) \longrightarrow fA, \ [a]\ker(f) \mapsto fa$
wohldefiniert, und es gilt:
$f = id_{fA,B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{A/\ker(f)}$, d.h.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{A/\ker(f)}"'] & B \\
A/\ker(f) \arrow[r, "\tilde{f}"'] & fA \arrow[u, "id_{fA,B}"']
\end{tikzcd}$$