LAAG WiS 2013/14 – TU DRESDEN

LÖSUNGEN zu Ü-BLATT 7

Ü1 (a) $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2,3,4\}, \{5,6\}\}$.

(b)

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	×	×				
2	×	×	×				
3	×	×	×				
4				×	×		
5				×	×		
6						×	×
7						×	×

(c)

	1	2	3	4	5	6
1	×	×		×		
2	×	×		×		
3			×		×	
4	×	×		×		
5			×		×	
6						×

(d1) $R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup S_3 \times S_3 \cup S_4 \times S_4$

mit $S_1 = \{a, c\}$, $S_2 = \{b\}$, $S_3 = \{d, f, g\}$

und $S_4 = \{e\}$.

(d2)

	a	c	b	d	f	g	e
a	×	×					
c	×	×					
b			×				
d				×	×	×	
f				×	×	×	
g				×	×	×	
e							×

Ü2 (a)

	1	2	3	4	5
1	×	×	×	×	×
2		×	×	×	×
3			×	×	×
4				×	×
5					×

(b)

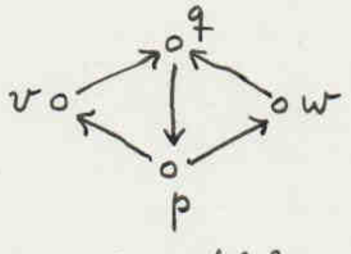
	2	3	6	12	18
2	×		×	×	×
3		×	×	×	×
6			×	×	×
12				×	
18					×

LÖSUNGEN

(H1) (a)

	i	v	w	t
i		X	X	
v		X	X	X
w			X	
t				

(b)



(H2) Für $a \in A$ ist $aI_f = \{b \in B \mid fa = b\} = \{fa\}$
und für $b \in B$ ist $I_f b = \{a \in A \mid fa = b\} = f^{-1}b$
die Menge der Urbilder von b unter f.

(H3) (a) Für $a \in A$ gilt nach Def. von $\pi_{A/R}$ stets

$$\pi_{A/R}\, a = [a]R = aR .$$

Also gilt für alle $(a,c) \in A \times A$:

$$(a,c) \in \ker(\pi_{A/R}) \iff \pi_{A/R}\, a = \pi_{A/R}\, c$$
$$\iff aR = cR \iff (a,c) \in R .$$

Folglich ist $\ker(\pi_{A/R}) = R$.

(b) Zu zeigen ist für beliebige $a, c \in A$,
dass aus $[a]\ker(f) = [c]\ker(f)$
stets $fa = fc$ folgt.

__Begr__: $[a]\ker(f) = [c]\ker(f)$
$\Rightarrow (a,c) \in \ker(f) \Rightarrow fa = fc$. ✓

Ferner wird behauptet: $f = id_{fA,B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{A/\ker(f)}$.

__Begr__: Für alle $a \in A$ gilt:

$$(id_{fA,B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{A/\ker(f)})\, a$$
$$= id_{fA,B}(\tilde{f}(\pi_{A/\ker(f)}\, a))$$
$$= id_{fA,B}(\tilde{f}([a]\ker(f)))$$
$$= id_{fA,B}(fa) = fa .$$

Folglich ist $id_{fA,B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{A/\ker(f)} = f$. □