5. Übungsblatt für die Übungen vom 15.11. bis 21.11.2013

Hausaufgaben bitte bis zum 21.11.2013 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Zeige für jede Menge A, dass $A \not\cong 2^A$.

Anleitung: Angenommen, es gäbe eine Bijektion $f : A \to 2^A$. Dann existiert zur Teilmenge

$$U = \{x \in A : x \notin fx\} \in 2^A$$

ein Element $t \in A$ mit $ft = U$. Warum führt dies zum Widerspruch?

as Element t liegt entweder in U, oder es liegt nicht in U. Nach der Definition von U liegt es genau dann in U, wenn es nicht in $f(t)$ liegt, aber $U = f(t)$.

Ü2. Die Funktionen $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ seien durch die folgenden Formeln definiert:

$$\begin{aligned} fx &= x + 3 \\ gx &= -x \\ hx &= x^2 \end{aligned}$$

Was sind dann Formeln für die folgenden Funktionen?

(a) $f \circ g$

(b) $f \star g$

(c) $g \circ f$

(d) $h \circ f \circ g$

Für welche dieser Funktionen gibt es Umkehrfunktionen?

Ü3. Sei $f : [10] \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f1 &= 1 \\ f2 &= 1 \\ f(n+2) &= f(n+1) + fn \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

Eine solche Definition heißt *rekursiv.*

Finde alle Werte von f.

H4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ Abbildungen mit $g \circ f = id_A$. Dann ist f injektiv und g surjektiv.

(b) Zu $A = [2]$ und $B = [3]$ finde man Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ mit $g \circ f = id_A$. Beachte, dass f und g nicht bijektiv sind.

(c) Sei $f : A \to B$ eine injektive Abbildung mit $A \neq \emptyset$. Dann existiert eine surjektive Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = id_A$.

H5. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch $f(n+2) = 2f(n+1) - fn$. Finde geschlossene Ausdrücke für fn, falls

(a) $f1 = 1$, $f2 = 2$, bzw.

(b) $f1 = 1$, $f2 = 3$.

Beweisen Sie die Gültigkeit mittels vollständiger Induktion.