TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik | Institut für Algebra | Prof. Stefan E. Schmidt und S. Reichard

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (LAAG I) WS2013/14

4. Übungsblatt für die Übungen vom 8.11. bis 14.11.2013

Hausaufgaben bitte bis zum 14.11.2013 12.00 Uhr in die Briefkästen im Willersbau, C-Flügel, Erdgeschoss, einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Geben Sie Beispiele für Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

(Die Verknüpfung von Funktionen ist nicht *kommutativ*.)

Lösung: Beispiel: $f : x \mapsto x + 1$, $g : x \mapsto 2x$.

Ü2. Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass

$$2^A \cong \underline{2}^A.$$

(Finden Sie eine bijektive Abbildung zwischen beiden Mengen, um zu zeigen, dass sie gleich groß sind.)

Lösung: Wir müssen zeigen, dass die Potenzmenge von A gleichviele Elemente hat wie die Menge der Funktionen von A in die zweielementige Menge $\underline{2} = \{0, 1\}$.

Definiere die Funktion χ und supp wie folgt (charakteristische Funktion und Träger):

$$\begin{aligned} \chi : 2^A &\to \underline{2}^A \\ (\chi B)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \operatorname{supp} : \underline{2}^A &\to 2^A \\ f &\mapsto \{x \in A : fx = 1\} \end{aligned}$$

Dann ist $\operatorname{supp} \circ \chi = id_{2^A}$ und $\chi \circ \operatorname{supp} = id_{\underline{2}^A}$ (nachrechnen!), also sind beide Funktionen bijektiv.

H3. (a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung surjektiver Funktionen surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung injektiver Funktionen injektiv ist.

H4. Seien A, B, C, D Mengen. Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(Wir sagen, die Verknüpfung von Funktionen ist *assoziativ*.)

Lösung: Sei $x \in A$. Dann ist

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))x &= h((g \circ f)x)\\ &= h(g(fx))\\ &= (h \circ g)(fx)\\ &= ((h \circ g) \circ f)x\end{aligned}$$

Da x beliebig war, sind beide Funktionen gleich.

H5. Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass

$$\#\left(2^A\right) = 2^{(\#A)}.$$

Benutzen Sie vollständige Induktion über $\#A$.

Lösung: Induktionsanfang: $\#A = 0$. Dann ist $A = \emptyset$, und A hat genau eine Teilmenge, und $2^0 = 1$.

Induktionsschritt: Sei $n = \#A > 0$, und die Aussage gelte für alle $n - 1$. Da A nicht leer ist, können wir $x \in A$ auswählen. Die Menge $B = A \setminus \{x\}$ hat $n - 1$ Elemente, also nach Induktionsvoraussetzung 2^{n-1} Teilmengen.

Jede dieser Teilmengen führt zu zwei Teilmengen von A: Entweder wir lassen sie, wie sie ist, oder wir fügen das Element x hinzu. Insgesamt bekommen wir doppelt soviele Teilmengen wie für B. Also ist

$$\#\left(2^A\right) = 2 \cdot \#\left(2^B\right) = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$